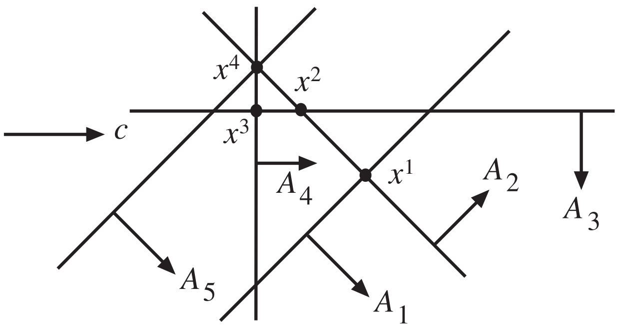
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il problema di PL in figura utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la soluzione di base primale (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti del vettore η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base visitate. Al termine, si discuta l'unicità delle soluzioni ottime determinate, sia per il problema primale che per il duale.

Come cambierebbe l'esecuzione dell'algoritmo se non fosse presente il quinto vincolo primale? Quale sarebbe, in tale caso, l'insieme delle soluzioni ottime primali? Giustificare le risposte.



SVOLGIMENTO

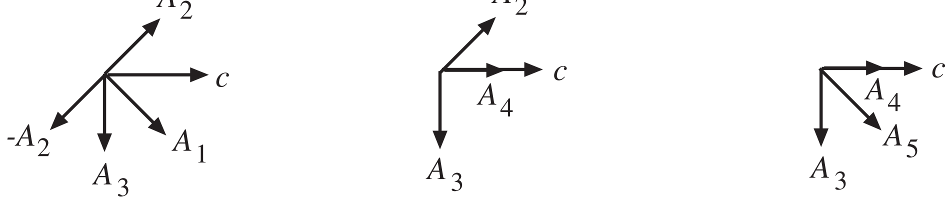
It. 1) Alla base $B_1 = \{1, 2\}$ corrisponde la soluzione di base primale x^1 in figura, non ammissibile. La soluzione di base primale è non degenere in quanto $I(x^1) = B_1$. Pure la soluzione di base duale è non degenere in quanto c non è collineare né con A_1 né con A_2, come mostrato in (a), e quindi sia y_1 che y_2 sono strettamente positive. $k = \min\{i \in N : A_i x^1 > b_i\} = \min\{3, 4, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. $\eta_1 > 0, \eta_2 < 0$ in quanto A_3 appartiene al cono finitamente generato da A_1 e $-A_2$, come mostrato in (a), quindi $h = 1$.

It. 2) Alla base $B_2 = \{2, 3\}$ corrisponde la soluzione di base primale x^2 in figura, non ammissibile. La base non è né primale né duale degenere. $k = \min\{i \in N : A_i x^2 > b_i\} = \min\{4, 5\} = 4$ per la regola anticiclo di Bland. Si ha $\eta_2 > 0$ e $\eta_3 > 0$. Inoltre $y_2/\eta_2 = y_3/\eta_3$ in quanto c e A_4 sono collineari, come mostrato in (b), pertanto $h = 2$ per la regola anticiclo di Bland.

It. 3) Alla base $B_3 = \{3, 4\}$ corrisponde la soluzione di base primale x^3 in figura, non ammissibile e non degenere. La soluzione di base duale è invece degenere in quanto $y_3 = 0$ e $y_4 > 0$, come evidenziato in (c). L'unico vincolo primale violato è il quinto, e quindi $k = 5$. $\eta_3 > 0, \eta_4 > 0$ in quanto A_5 appartiene al cono finitamente generato da A_3 e A_4, come mostrato in (c). Poiché $y_3/\eta_3 = 0 < y_4/\eta_4$, si ha $h = 3$.

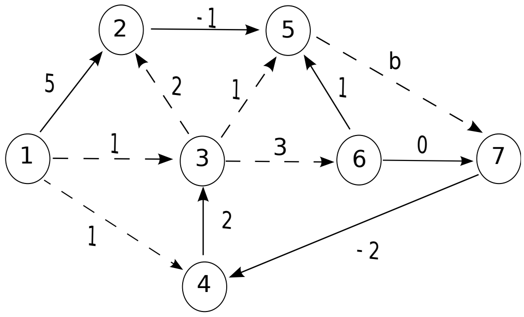
It. 4) Alla base $B_4 = \{4, 5\}$ corrisponde la soluzione di base primale x^4 in figura. Tale soluzione è degenere in quanto $I(x^4) = \{2, 4, 5\}$. Pure la soluzione di base duale è degenere in quanto $y_5 = 0$, come segue da (c)). Essendo x^4 primale ammissibile l'algoritmo termina: x^4 è soluzione ottima per il problema primale. Come segue immediatamente da considerazioni di natura geometrica, x^4 è l'unica soluzione ottima del problema primale. La soluzione ottima duale invece non è unica. Ad esempio, alla base $\{2, 5\}$ corrisponde una soluzione di base duale ottima distinta da quella determinata dall'algoritmo, in quanto sia la seconda che la quinta componente sono strettamente positive.

(a) (b) (c)



Se non fosse presente il quinto vincolo primale, l'algoritmo terminerebbe alla terza iterazione, restituendo la soluzione ottima primale x^3. Si osservi che, in tal caso, x^4 sarebbe una soluzione ottima alternativa, cosí come l'insieme di tutte le soluzioni appartenenti al segmento di estremi x^3 e x^4, essendo c collineare con A_4. Tale segmento rappresenterebbe pertanto l'insieme delle soluzioni ottime primali.

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, in cui è evidenziato un albero di copertura T radicato in 1 e orientato (mediante linee tratteggiate), e in cui b denota un parametro a valori reali.



Si discuta per quali valori del parametro b:

1. T è un albero dei cammini minimi di radice 1;
2. T è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1;
3. il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura risulta essere inferiormente illimitato.

Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

1. Associamo a ogni nodo i del grafo un'etichetta $d(i)$ che rappresenta il costo dell'unico cammino in T dal nodo radice, ovvero dal nodo 1, a i: $d(1) = 0$, $d(2) = 3$, $d(3) = 1$, $d(4) = 1$, $d(5) = 2$, $d(6) = 4$, $d(7) = 2 + b$.

   T è un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli i valori di b per cui gli archi non appartenenti a T soddisfano le condizioni di Bellman, ovvero $d(i) + c_{ij} \geq d(j)$, $\forall (i, j) \notin T$. Tali condizioni sono soddisfatte per tutti gli archi non incidenti il nodo 7. Per quanto riguarda i due archi non in T incidenti il nodo 7, si ha:

   - $(6, 7)$: $d(6) + 0 \geq d(7)$, ovvero $4 + 0 \geq 2 + b$ se e solo se $b \leq 2$
   - $(7, 4)$: $d(7) - 2 \geq d(4)$, ovvero $2 + b - 2 \geq 1$ se e solo se $b \geq 1$.

   Segue che T è un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se $1 \leq b \leq 2$.

2. Dato un valore di b, $1 \leq b \leq 2$, T è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1 se non esistono archi non appartenenti a T che soddisfino le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza oppure, se ne esistono, per ognuno di tali archi (i, j) l'inserzione di (i, j) in T, e la conseguente eliminazione da T dell'unico arco entrante in j, determini una struttura che non è un albero. Osserviamo che l'arco $(2, 5)$, non appartenente a T, soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza: $d(2) - 1 = 3 - 1 = d(5) = 2$. Inoltre, inserendo $(2, 5)$ in T, e rimuovendo $(3, 5)$, si ottiene ancora un albero. Segue che, per nessun valore di b, T è l'unico albero dei cammini minimi di radice 1.

   Si osservi che, per $b = 2$, anche l'arco $(6, 7)$ soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, e può sostituire $(5, 7)$ in T. Analogamente, per $b = 1$ l'arco $(7, 4)$ soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, e può sostituire $(1, 4)$ in T, ottenendo una soluzione ottima alternativa.

3. Il problema dell'albero dei cammini minimi risulta essere inferiormente illimitato se e solo se sono presenti cicli orientati di costo negativo. Nel caso specifico, per ispezione si può verificare che il grafo contiene quattro cicli orientati:

   - $(4, 3, 6, 7)$, di costo 3
   - $(4, 3, 6, 5, 7)$, di costo $4 + b$
   - $(4, 3, 5, 7)$, di costo $1 + b$
   - $(4, 3, 2, 5, 7)$, di costo $1 + b$.

   Segue che il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura risulta essere inferiormente illimitato per $b < -1$.

3) Si consideri una rete di trasporto intermodale, descritta in termini di un grafo orientato $G = (N, A)$. Sia u_{ij} la capacità del collegamento $(i, j) \in A$. Sia inoltre v la quantità di merce che deve essere inviata lungo G dal nodo sorgente s al nodo destinazione t.

L'insieme A dei collegamenti della rete è partizionato in k sottoinsiemi, A_1, A_2, $\ldots$, A_k: gli archi appartenenti a uno stesso sottoinsieme modellano collegamenti della rete caratterizzati dalla stessa modalità di trasporto, quali tratte stradali, linee ferroviarie, rotte navali, ecc.

3.1) Si formuli in termini di *PLI* il problema di inviare la quantità di merce v da s a t lungo G rispettando la capacità dei collegamenti e utilizzando il minor numero possibile di modalità di trasporto distinte. **3.2**) Si modifichi la formulazione proposta in **3.1**) per lo scenario in cui, se venisse utilizzata sia la modalità di trasporto 1 che la modalità di trasporto 2, entrambe molto costose, allora la modalità di trasporto 3, particolarmente onerosa, non potesse essere utilizzata (assumendo $k \geq 3$).

SVOLGIMENTO

Introduciamo una variabile di flusso x_{ij}, per ciascun collegamento $(i, j) \in A$, per denotare la quantità di merce inviata lungo (i, j). Introduciamo inoltre una variabile binaria y_h per ogni modalità di trasporto h, $h = 1, ...k$, con il seguente significato:

$$y_h = \begin{cases} 1 & \text{se viene utilizzata la modalità di trasporto } h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad h = 1, \ldots, k$$

Utilizzando tali famiglie di variabili, è possibile formulare il problema mediante il seguente modello PLI:

$$\begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_{h=1}^{k} y_h & \\ & \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -v & \text{se } i = s \\ v & \text{se } i = t \\ 0 & \text{se } i \neq s, t \end{cases} & i \in N \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} y_h & (i, j) \in A_h, h = 1, \ldots, k \\ & y_h \in \{0, 1\} & h = 1, \ldots, k \end{array}$$

Il primo blocco di vincoli, di conservazione di flusso, garantisce l'invio della quantità di merce v da s a t. Il secondo blocco di vincoli è costituito da vincoli di capacità congiuntamente a vincoli logici. In particolare tali vincoli garantiscono che, se viene usata la modalità di trasporto h, vale a dire se viene inviata merce utilizzando almeno un arco appartenente all'insieme A_h, allora la corrispondente variabile y_h è forzata ad assumere il valore 1. Infine la funzione obiettivo, da minimizzare, conteggia il numero totale di modalità di trasporto utilizzate per l'invio.

Il requisito addizionale, descritto in **3.2**), può essere formulato aggiungendo al modello PLI il seguente vincolo logico:

$$y_3 \leq (1 - y_1) + (1 - y_2)$$