

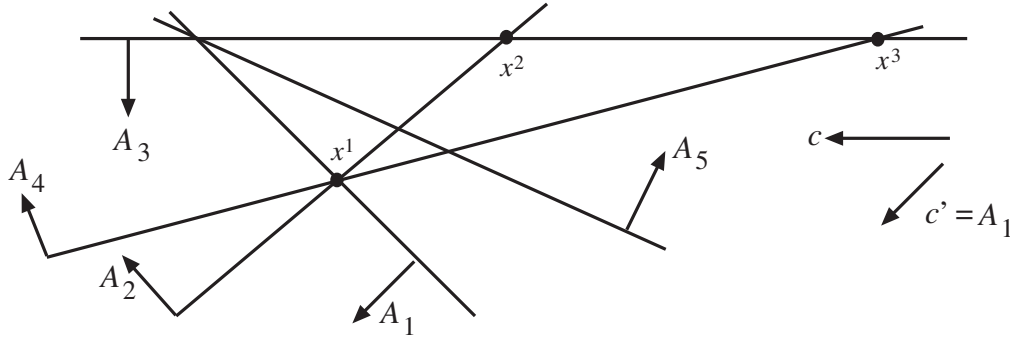
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Nome:

Cognome:

Matricola:

1) Si risolva il problema di *PL* in figura, per via geometrica, utilizzando l’algoritmo del Simpleso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la soluzione di base primale (in figura), l’indice entrante k , il segno delle componenti dei vettori y_B e η_B , e l’indice uscente h , giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall’algoritmo. Si specifichi infine come cambierebbe lo svolgimento dell’esercizio se il gradiente della funzione obiettivo fosse il vettore c' riportato in figura.



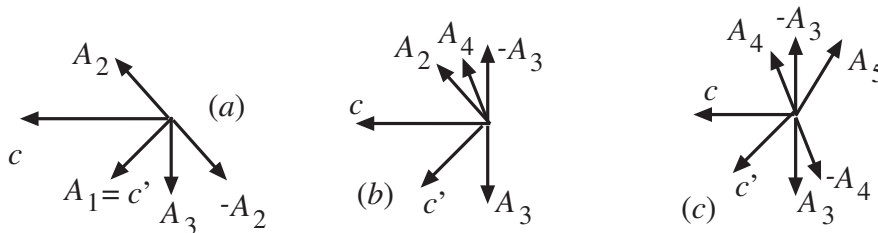
SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale x^1 viola il solo vincolo 3, pertanto $k = 3$ per la regola anticiclo di Bland. $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_1 e A_2 . La base è pertanto duale non degenera, mentre è primale degenera in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 4\}$. Poiché $A_3 \in \text{cono}(A_1, -A_2)$, come mostrato in figura (a), risultano $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 < 0$, pertanto $h = 1$.

it. 2): $B = \{2, 3\}$. La soluzione di base primale x^2 viola i vincoli 4 e 5, pertanto $k = \min\{4, 5\} = 4$ per la regola anticiclo di Bland. $y_2 > 0$ e $y_3 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_2 e A_3 . La base è pertanto duale non degenera, ed è inoltre primale non degenera in quanto $I(x^2) = \{2, 3\}$. Poiché $A_4 \in \text{cono}(A_2, -A_3)$, come mostrato in figura (b), risultano $\eta_2 > 0$ e $\eta_3 < 0$, pertanto $h = 2$.

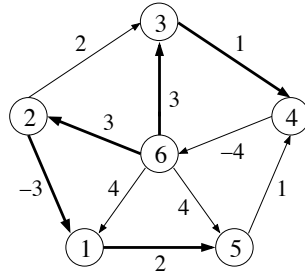
it. 3): $B = \{3, 4\}$. La soluzione di base primale x^3 viola il solo vincolo 5, pertanto $k = 5$. $y_2 > 0$ e $y_3 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_3 e A_4 . La base è pertanto duale non degenera, ed è inoltre primale non degenera in quanto $I(x^3) = \{3, 4\}$. Poiché $A_5 \in \text{cono}(-A_3, -A_4)$, come mostrato in figura (c), l’algoritmo termina in quanto $\eta_B \leq 0$. Segue che il problema duale è inferiormente illimitato e di conseguenza il problema primale è vuoto.

Se il gradiente della funzione obiettivo fosse c' , l’esecuzione dell’algoritmo sarebbe sostanzialmente invariata, in quanto tutte le basi visitate sono duali ammissibili rispetto a c' , come mostrato nelle figure (a), (b) e (c). La base $B = \{1, 2\}$, tuttavia, risulterebbe duale degenera poiché, essendo $c' = A_1$, si avrebbe $y_1 = 1$ e $y_2 = 0$.



2) a) Dato il grafo orientato in figura, si verifichi se l'albero T evidenziato sia un albero dei cammini minimi di radice 6. In caso di risposta negativa, si modifichi il costo di uno o più archi del grafo in modo che T diventi l'unico albero dei cammini minimi di radice 6. Giustificare le risposte.

b) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice r su un generico grafo orientato $G = (N, A)$. Si dimostri che nessun vettore di etichette può soddisfare le condizioni di Bellman qualora nel grafo sia presente un ciclo orientato di costo negativo.



SVOLGIMENTO

a) Sia d il vettore delle etichette tale che $d(i)$ rappresenti il costo dell'unico cammino in T dal nodo 6 al nodo i :

$$d(1) = 0, \quad d(2) = 3, \quad d(3) = 3, \quad d(4) = 4, \quad d(5) = 2, \quad d(6) = 0.$$

T è un albero dei cammini minimi di radice 6 se e solo se d soddisfa le condizioni di Bellman, ovvero $d(i) + c_{ij} \geq d(j)$ per ogni arco (i, j) . Poiché gli archi in T verificano tali condizioni in forma di uguaglianza, è sufficiente verificarle per gli archi non in T :

$$d(2) + c_{23} = 3 + 2 > 3 = d(3)$$

$$d(6) + c_{61} = 0 + 4 > 0 = d(1)$$

$$d(6) + c_{65} = 0 + 4 > 2 = d(5)$$

$$d(4) + c_{46} = 4 - 4 = 0 = d(6)$$

$$d(5) + c_{54} = 2 + 1 < 4 = d(4)$$

Segue che T non è un albero dei cammini minimi di radice 6. Poiché l'unico arco a violare le condizioni di Bellman è $(5, 4)$, è sufficiente aumentare il suo costo di una quantità $\geq d(4) - (d(5) + c_{54}) = 1$ per garantire che T diventi un albero dei cammini minimi di radice 6. Affinché T risulti l'unico albero dei cammini minimi di radice 6, il costo dell'arco $(5, 4)$ deve essere incrementato di una quantità > 1 , in modo che le relative condizioni di Bellman siano soddisfatte in forma di disuguaglianza stretta. Si osservi che i restanti archi non in T soddisfano già le condizioni di Bellman in forma di disuguaglianza stretta, ad eccezione di $(4, 6)$. L'arco $(4, 6)$, tuttavia, non può far parte di un albero dei cammini minimi di radice 6. Segue che, incrementando il costo di $(5, 4)$ di un qualsiasi valore > 1 , T diventa l'unico albero dei cammini minimi di radice 6.

b) Supponiamo che nel grafo G sia presente un ciclo orientato $C = (i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$ di costo negativo, ovvero $c(C) = c_{i_1 i_2} + c_{i_2 i_3} + \dots + c_{i_k i_1} < 0$. Supponiamo per assurdo che esista un vettore di etichette d che soddisfa le condizioni di Bellman. Considerando gli archi appartenenti al ciclo C , valgono allora le disuguaglianze

$$\begin{aligned} d(i_1) + c_{i_1 i_2} &\geq d(i_2) \\ d(i_2) + c_{i_2 i_3} &\geq d(i_3) \\ &\vdots \\ d(i_{k-1}) + c_{i_{k-1} i_k} &\geq d(i_k) \\ d(i_k) + c_{i_k i_1} &\geq d(i_1) \end{aligned}$$

che, sommate membro a membro, danno la disuguaglianza $c(C) \geq 0$, in contraddizione con l'ipotesi.

3) La società *FastLog* deve progettare una rete logistica. L'insieme N dei nodi della rete è prestabilito. Dato un insieme A di collegamenti (ovvero archi orientati) potenzialmente utilizzabili, *FastLog* deve invece decidere quali di questi attivare, con l'obiettivo di inviare un dato prodotto da un nodo sorgente $s \in N$ a un nodo destinazione $t \in N$ lungo la rete, una volta progettata. Per ogni collegamento $(i, j) \in A$ che decida di attivare, *FastLog* deve pagare un costo fisso di attivazione f_{ij} . Inoltre, *FastLog* deve pagare un costo c_{ij} per ogni unità di prodotto inviato lungo (i, j) .

Sapendo che ogni collegamento (i, j) , se attivato, ha una capacità pari a u_{ij} , e sapendo che *FastLog* ha un budget complessivo pari a C (sia per i costi fissi che per i costi di invio), si proponga un modello PLI che aiuti *FastLog* a decidere quali archi attivare, e come inviare il prodotto lungo gli archi attivati, in modo da massimizzare il numero di unità inviate da s a t , nel rispetto della capacità dei collegamenti attivati e non sforando il budget disponibile per il progetto della rete.

Come cambieresti la formulazione proposta nel caso in cui, invece di dover pagare un costo fisso di attivazione f_{ij} per ogni collegamento (i, j) attivato, *FastLog* dovesse decidere di quanti moduli di capacità dotare ogni collegamento (i, j) (eventualmente zero, se non lo si vuole attivare), sapendo che in commercio sono disponibili moduli standard di capacità u al costo unitario f ?

SVOLGIMENTO

Introduciamo le variabili di flusso x_{ij} , $\forall (i, j) \in A$, tali che x_{ij} denota il numero di unità di prodotto che *FastLog* decide di inviare lungo il collegamento (i, j) . Introduciamo inoltre le variabili binarie y_{ij} , $\forall (i, j) \in A$, con il seguente significato:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se viene attivato il collegamento } (i, j) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Utilizzando tali famiglie di variabili, è possibile formulare il problema proposto mediante il seguente modello PLI, che generalizza il modello relativo al problema di flusso massimo da un nodo sorgente s a un nodo destinazione t . Come nel modello di flusso massimo, la variabile v rappresenta il numero di unità di prodotto inviate da s a t :

$$\begin{aligned} \max \quad & v \\ & \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -v & i = s \\ v & i = t \\ 0 & i \neq s, t \end{cases} \quad \forall i \in N \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} y_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \\ & \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} y_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \leq C \\ & y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \\ & x_{ij} \in \mathcal{Z} \quad \forall (i, j) \in A \end{aligned}$$

Il primo blocco di vincoli, di conservazione di flusso, garantisce l'invio di v unità di prodotto da s a t lungo la rete. Il secondo blocco di vincoli è costituito da vincoli di capacità congiuntamente a vincoli logici. Tali vincoli assicurano che, se il collegamento (i, j) è attivato (ovvero $y_{ij} = 1$), allora è possibile inviare il prodotto lungo (i, j) , e il massimo numero di unità inviabili è u_{ij} , ovvero la capacità del collegamento. Se invece $y_{ij} = 0$, cioè (i, j) non è attivato, allora non è possibile inviare il prodotto lungo (i, j) . Segue il vincolo di budget, che impone che il costo totale derivante dal progetto della rete, espresso dalla somma dei costi fissi di attivazione dei collegamenti e del costo totale di invio, non ecceda l'ammontare disponibile C . La funzione obiettivo è v , ovvero il numero di unità di prodotto inviate da s a t , che pertanto verrà massimizzato.

Nel caso si dovesse decidere di quanti moduli di capacità dotare ogni collegamento (i, j) , basterebbe definire le variabili y_{ij} , $\forall (i, j) \in A$, come variabili intere non negative invece che binarie, con y_{ij} indicante il numero di moduli di cui si vuole dotare (i, j) , e sostituire i vincoli di capacità e il vincolo di budget della formulazione proposta mediante:

$$0 \leq x_{ij} \leq u y_{ij}, \forall (i, j) \in A \text{ e } \sum_{(i,j) \in A} f y_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \leq C.$$