Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

Induzione sulle regole 4.1.7

Induzione sulle derivazioni

Derivazioni

Dato un sistema logico *R*, una derivazione in *R*, e' scritta

$$d \Vdash_R y$$

dove

- o $d = (\frac{}{y}) \in R$ è un assioma di R;
- oppure $d = (\frac{d_1,\ldots,d_n}{y}) \in R$ per derivazioni $d_1 \Vdash_R x_1, \ldots d_n \Vdash_R x_n$ tali che $\frac{x_1,\ldots,x_n}{y}$ è una regola di inferenza di R.

$$D_R \triangleq \{d \mid d \Vdash_R y\}$$

Sotto-derivazione immediata

$$A = D_R$$

$$\prec = \left\{ \left(d_i, \frac{d_1, \ldots, d_n}{y} \right) \;\middle|\; d_1 \Vdash_R x_1, \ldots, d_n \Vdash_R x_n, \left(\frac{x_1, \ldots, x_n}{y} \right) \in R \right\}$$

(relazione di sotto-derivazione immediata)

Esempio

$$R = \left\{ \frac{}{\mathsf{N} \longrightarrow n}, \frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \quad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \oplus \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_0 + n_1}, \frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \quad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \otimes \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_0 \cdot n_1} \right\}$$

$$\frac{}{2 \longrightarrow 2} \quad \prec \quad \frac{\frac{}{1 \longrightarrow 1} \quad \frac{}{2 \longrightarrow 2}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3} \quad \prec \quad \frac{\frac{\frac{}{1 \longrightarrow 1} \quad \frac{}{2 \longrightarrow 2}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3} \quad \frac{\frac{}{3 \longrightarrow 3} \quad \frac{}{4 \longrightarrow 4}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow 7}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21}$$

Lemma

$D_R, \prec$ e' b.f.

Sia $height : D_R \to \mathbb{N}$ definita come:

$$
\begin{array}{lcll}
height\left(\frac{}{y}\right) & \triangleq & 1 & \text{if } (\frac{}{y}) \in R \\
height\left(\frac{d_1,\ldots,d_n}{y}\right) & \triangleq & 1 + \max_{i\in[1,n]} height(d_i) & \text{if } d_1 \Vdash_R x_1, \ldots, d_n \Vdash_R x_n, (\frac{x_1,\ldots,x_n}{y}) \in R
\end{array}
$$

Per definizione, se $d \prec d'$ allora $height(d) < height(d')$

Ogni catena discendente in $\prec$ induce una catena discendente in $(\mathbb{N}, <)$

Dal momento che $<$ è b.f. allora anche $\prec$ è b.f.

Principio di induzione sulle derivazioni

$$\frac{\forall \frac{x_1,\ldots,x_n}{y} \in R.\ \forall d_1 \Vdash_R x_1, \ldots, d_1 \Vdash_R x_n.\ (P(d_1) \wedge \cdots \wedge P(d_n)) \Rightarrow P(\frac{d_1,\ldots,d_n}{y})}{\forall d.\ P(d)}$$

Corollario

$D_R, \prec^+$ e' b.f.

Perchè $\prec^+$ è la chisura transitiva di una relazione b.f.

Esempio

$$R = \left\{ \frac{}{\mathsf{N} \longrightarrow n}, \frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \quad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \oplus \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_0 + n_1}, \frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \quad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \otimes \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_0 \cdot n_1} \right\}$$

$$\frac{}{2 \longrightarrow 2} \quad \prec^+ \quad \frac{\dfrac{\dfrac{}{1 \longrightarrow 1} \quad \dfrac{}{2 \longrightarrow 2}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3} \quad \dfrac{\dfrac{}{3 \longrightarrow 3} \quad \dfrac{}{4 \longrightarrow 4}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow 7}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21}$$

Induzione sulle regole

Tipiche proprieta'

Molto spesso accade che la proprietà di una derivazione riguardi solo la conclusione della derivazione

$$d \Vdash_R y \quad \Rightarrow \quad P(d) \Leftrightarrow Q(y)$$

$$P\left(\frac{d_1, \ldots, d_n}{y}\right) \triangleq Q(y)$$

in questi casi possiamo evitare di menzionare le derivazioni

Principio di induzione sulle regole

supponiamo che esistano delle derivazioni e che possiamo costruirle ma puo’ non essere necessario menzionare questo

$$\frac{\forall \frac{x_1, \ldots, x_n}{y} \in R.\ (\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq I_R \wedge P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_n)) \Rightarrow P(y)}{\forall x \in I_R.\ P(x)}$$

$$I_R \triangleq \{y \mid \Vdash_R y\}$$

Principio di induzione sulle regole semplificato

supporre che le premesse siano teoremi può non essere necessario

$$\frac{\forall \frac{x_1, \ldots, x_n}{y} \in R.\ (P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_n)) \Rightarrow P(y)}{\forall x \in I_R.\ P(x)}$$

Schemi di induzione

proprieta' dei numeri $P(n)$ induzione matematica

due proof obligations: $P(0)$ and $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

proprieta' dei termini $P(t)$ induzione strutturale

una proof obligation per ogni simbolo di funzione

proprieta' delle formule $\mathrm{P(F)}$ induzione sulle regole

una proof obligation per ogni regola di inferenza

Determinismo: 2 modi

proprieta' dei termini $P(t)$ induzione strutturale

$$P(c) \triangleq \forall \sigma, \sigma_1, \sigma_2.\ \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1 \wedge \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

proprieta' delle formule $\mathrm{P(F)}$ induzione sulle regole

$$P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1) \triangleq \forall \sigma_2.\ \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

Determinismo dei comandi

$$c \ ::= \ \mathbf{skip} \ \mid \ x := a \ \mid \ c \, ; c \ \mid \ \mathbf{if} \ b \ \mathbf{then} \ c \ \mathbf{else} \ c \ \mid \ \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c$$

$$\frac{}{\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma} \qquad \frac{\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma[n/x]} \qquad \frac{\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle c_0 \, ; c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff} \quad \langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{if} \ b \ \mathbf{then} \ c_0 \ \mathbf{else} \ c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'} \qquad \frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{if} \ b \ \mathbf{then} \ c_0 \ \mathbf{else} \ c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}}{\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma} \qquad \frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

$$P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1) \triangleq \forall \sigma_2 . \ \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

Ci chiediamo:

$$\forall c, \sigma, \sigma_1 . \ P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1) \ ?$$

Caso Base

$$\frac{}{\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma}$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma) \triangleq \forall \sigma_2.\ \langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma = \sigma_2$$

Consideriamo σ_2 t.c. $\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Vogliamo provare $\sigma = \sigma_2$

Consideriamo il goal $\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

solo la regola $\frac{}{\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma}$ è applicabile, per cui $\sigma_2 = \sigma$

Base case

$$\frac{\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma[n/x]}$$

Assumiamo $\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow n$

Vogliamo provare

$$P(\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma[n/x]) \triangleq \forall \sigma_2.\ \langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma[n/x] = \sigma_2$$

Prendiamo σ_2 t.c. $\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Vogliamo provare $\sigma[n/x] = \sigma_2$

Consideriamo il goal $\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Solo la regola $\dfrac{\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma[n/x]}$ e' applicabile, per cui $\sigma_2 = \sigma[m/x]$

con $\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow m$

dal momento che abbiamo assunto $\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow n$

Per il determinismo di Aexp abbiamo che $n = m$ e per questo $\sigma_2 = \sigma[m/x] = \sigma[n/x]$

Caso Induttivo

$$\frac{\langle c_0, \sigma\rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle c_1, \sigma''\rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle c_0\,; c_1, \sigma\rangle \longrightarrow \sigma'}$$

Assumiamo (ipotesi induttiva)

$$P(\langle c_0, \sigma\rangle \longrightarrow \sigma'') \triangleq \forall \sigma_2''.\ \langle c_0, \sigma\rangle \longrightarrow \sigma_2'' \Rightarrow \sigma'' = \sigma_2''$$

$$P(\langle c_1, \sigma''\rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2'.\ \langle c_1, \sigma''\rangle \longrightarrow \sigma_2' \Rightarrow \sigma' = \sigma_2'$$

Vogliamo provare

$$P(\langle c_0\,; c_1, \sigma\rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2.\ \langle c_0\,; c_1, \sigma\rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma_2$$

Prendiamo σ_2 t.c. $\langle c_0\,; c_1, \sigma\rangle \longrightarrow \sigma_2$

Vogliamo provare $\sigma' = \sigma_2$

Caso induttivo (cont.)

$$P(\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'') \triangleq \forall \sigma_2''.\ \langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2'' \Rightarrow \sigma'' = \sigma_2''$$
$$P(\langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2'.\ \langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma_2' \Rightarrow \sigma' = \sigma_2'$$

Consideriamo il goal $\langle c_0 \,;\, c_1 \,,\, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Solo la regola $\dfrac{\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle c_0 \,;\, c_1 \,,\, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$ e' applicabile

quindi $\sigma_2 = \sigma_2'$ con $\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2''$ e $\langle c_1, \sigma_2'' \rangle \longrightarrow \sigma_2'$

Per ipotesi induttiva $P(\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'')$, abbiamo $\sigma'' = \sigma_2''$

e percio' $\langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma_2'$

Per ipotesi induttiva $P(\langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma')$, quindi abbiamo $\sigma' = \sigma_2'$

Caso Induttivo

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff} \quad \langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

Assumiamo

$$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

(ipotesi induttiva)

$$P(\langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2.\ \langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma_2$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2.\ \langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma_2$$

Prendiamo σ_2 t.c. $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Vogliamo provare $\sigma' = \sigma_2$

Caso Induttivo (con.)

$$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

$$P(\langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2.\ \langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma_2$$

Consideriamo il goal $\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Per il determinismo di Bexp

Solo la regola $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff} \quad \langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$ e' applicabile

quindi $\sigma_2 = \sigma_2'$ con $\langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2'$

Per ipotesi induttiva $P(\langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma')$, abbiamo $\sigma' = \sigma_2' = \sigma_2$

Caso induttivo

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ c_0\ \mathbf{else}\ c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

Analogo al precedente

Caso base

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma}$$

Assumiamo

$$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma) \triangleq \forall \sigma_2.\ \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma = \sigma_2$$

Prendiamo σ_2 t.c. $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Vogliamo provare $\sigma = \sigma_2$

Caso induttivo (con.)

$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$

Consideriamo il goal $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Per la determinismo di Bexp

Solo la regola $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma}$ e' applicabile e quindi $\sigma_2 = \sigma$

Caso induttivo

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

Assumiamo

$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt}$ (ipotesi induttiva)

$$P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'') \triangleq \forall \sigma_2''.\ \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2'' \Rightarrow \sigma'' = \sigma_2''$$

$$P(\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2'.\ \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma_2' \Rightarrow \sigma' = \sigma_2'$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2.\ \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma_2$$

Prendiamo σ_2 t.c. $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Vogliamo provare $\sigma' = \sigma_2$

Caso induttivo (con.)

$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt}$

$P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'') \triangleq \forall \sigma''_2.\ \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma''_2 \Rightarrow \sigma'' = \sigma''_2$

$P(\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma'_2.\ \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma'_2$

Consideriamo il goal $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Per la determinismo di Bexp

Solo la regola $\dfrac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$ e' applicabile

quindi $\sigma_2 = \sigma'_2$ con $\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma''_2$ and $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma''_2 \rangle \longrightarrow \sigma'_2$

Per ipotesi induttiva $P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'')$, abbiamo $\sigma'' = \sigma''_2$

percio' $\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'_2$

Per ipotesi induttiva $P(\langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma')$

concludiamo $\sigma' = \sigma'_2 = \sigma_2$

Determinismo dei comandi

$$\forall c, \sigma, \sigma_1.\ P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1)$$

$$P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1) \triangleq \forall \sigma_2.\ \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

Esercizio 1

[Ex. 1] Definire usando la ricorsione ben fondata una funzione vars tale che data un' espressione aritmetica a ritorna l'insieme degli identificatori che appaiono nell'espressione aritmetica a. Poi provare per induzione sulle regole che

$$\forall a \in Aexp, \forall \sigma \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$\langle a, \sigma \rangle \to n$ implica $(\forall y \in vars(a).\ \sigma(y) = \sigma'(y)) \Rightarrow \langle a, \sigma' \rangle \to n$).

se due memorie coincidono su tutte le variabili che appaiono in un'espressione, allora valutando l'espressione nelle due memorie dà lo stesso risultato

Esercizio 2

Ex. 2] Definire usando la ricorsione ben fondata una funzione vars tale che data una comando a ritorna l'insieme degli identificatori che appaiono a sinistra degli assegnamenti.
Poi provare per induzione sulle regole che

$$\langle c, \sigma \rangle \to \sigma' \qquad \text{implica} \qquad \forall x \notin vars(c).\ \sigma(x) = \sigma'(x).$$

se una variabile non appare in un'assegnamento allora il suo valore iniziale viene conservato nello store finale

Esercizio (da consegnare)

Supponiamo di estendere la sintassi delle espressioni aritmetiche

a ::= x | n | a op a | x++

dove x++ valuta il valore corrente di x ma poi incrementa x come effetto collaterale

1. Ridefinire la semantica operativa di Aexp, Bexp e Com per prendere in considerazione gli effetti collaterali e discutere tutte le problematiche e le conseguenti scelte progettuali
2. Trova due espressioni aritmetiche a0 e a1 tali che la valutazione di a0+a1 sia diversa da a1+a0, se possibile