

Esercizi sui metodi di iterazione funzionale
9/5/2008

Esercizio 1. È data la funzione

$$f(x) = e^x - 4x^2 + 4.$$

- a) Si dica quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$ e se ne diano degli intervalli di separazione.
- b) Per ognuna delle soluzioni si studi la convergenza del metodo delle tangenti (compresi scelta del punto iniziale ed ordine di convergenza).
- *c) Si dica se l'equazione

$$x = g(x), \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{4 + e^x}{4x}$$

è equivalente all'equazione $f(x) = 0$ e si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ ad ognuna delle soluzioni positive.

Esercizio 2 Si consideri il metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) = \alpha^2 x^3 - 3\alpha x^2 + 3x,$$

con $\alpha > 0$.

- a) Si determinino le soluzioni dell'equazione $x = g(x)$.
- b) Il metodo è convergente a tutte le soluzioni? Nei casi di convergenza di determini un punto iniziale.
- c) Si dica quale è l'ordine nel caso di convergenza.
- d) Si indichi quale potrebbe essere l'utilizzazione pratica di questo metodo.

Esercizio 3 Si consideri l'equazione

$$x^6 + 3x + 1 = 0.$$

- a) Si determini il numero delle soluzioni reali negative dell'equazione.
- b) Per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$, si studi la convergenza del metodo delle tangenti quando si assuma x_0 come punto iniziale.
- c) Si studi la convergenza del metodo iterativo

$$x_{i+1} = -\frac{x^6 + 1}{3}$$

quando si assuma come punto iniziale un qualsiasi punto x_0 reale.

Esercizio 4 È data l'equazione $f(x) = e^x \log x - 1 = 0$.

- a) Con opportuna separazione grafica, dire quante soluzioni reali ha l'equazione e disegnare il grafico di $f(x)$.
- b) Studiare la convergenza del metodo delle tangenti, indicando anche come scegliere il punto iniziale e qual è l'ordine di convergenza.
- c) Dire se l'equazione $x = g(x)$, dove $g(x) = -\log(\log x)$ è equivalente a quella data.
- d) Studiare la convergenza locale del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$.

Esercizio 5 È data l'equazione

$$f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x} = 0.$$

- a) Si disegni il grafico della funzione $f(x)$ e si dica quante soluzioni ha l'equazione e con quale molteplicità.
- b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti.
- c) Si studi la convergenza del metodo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove } g(x) = 2\sqrt{x} - 1.$$