RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -8x_1 & + & 4x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base e la loro eventuale degenerazione, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del PL dato. Si consideri, inoltre, l'ultima direzione ξ individuata dall'algoritmo: se il vettore dei costi c fosse $[-4, 4]$ invece che $[-8, 4]$, ξ sarebbe ancora di crescita? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y}_N = 0 \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale degenere e duale non degenere] $h = \min\{\, i \in B \, : \, y_i < 0 \,\} = \min\{3, 4\} = 3$, $B(h) = 1$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \, : \, A_i \xi > 0 \,\} = \{1, 2, 5\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i \bar{x})/A_i \xi \ , \ \lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 4 \ , \ \lambda_5 = 0 \ , \ \bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \, : \, i \in J \,\} = 0$$

$k = \min\{\, i \in J \, : \, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 5$ [cambio di base degenere]

it.2) $B = \{4, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale degenere e duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 1$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{2\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_2 = 4 \ , \ k = 2$$

it.3) $B = \{2, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale non degenere e duale non degenere] $h = 5$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \emptyset$$

STOP ξ è una direzione di crescita illimitata, pertanto il problema primale è superiormente illimitato e di conseguenza la regione ammissibile del problema duale è vuota. Se il vettore dei costi c fosse $[-4, 4]$ invece che $[-8, 4]$ si avrebbe $c\xi = 0$, e pertanto la direzione ξ non sarebbe di crescita (e neppure di decrescita).

2) Si consideri il seguente problema di PL parametrico in ε

$$(P) \qquad \begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 4+\varepsilon \end{array}$$

e la soluzione $\bar{y} = [3, 0, 0, 2]$ per il suo duale. Utilizzando il il teorema degli scarti complementari si determini per quali valori di ε la soluzione $\bar{y}$ è ottima per il duale, discutendone l'unicità. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Per la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \;\; \max\{\, cx \;:\; Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D) \;\; \min\{\, yb \;:\; yA = c\,,\; y \geq 0 \,\},$$

il teorema forte della dualità e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) complementare a $\bar{y}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verificano le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m.$$

Il duale di (P) è

$$(D) \qquad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & y_1 & & & + & y_3 & + & (4+\varepsilon)y_4 & & \\ & -y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 3 \\ & -y_1 & + & y_2 & - & y_3 & + & y_4 & = & -1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Per il teorema degli scarti complementari, $\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione primale $\bar{x}$ che rispetta gli scarti complementari con essa. Ovvero i vincoli primali a cui corrispondono variabili duali che hanno valore positivo in $\bar{y}$, ossia i vincoli 1 e 4, devono essere attivi in $\bar{x}$. Quindi $\bar{x}$ deve risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 4+\varepsilon \end{array} \right.$$

che ha come unica soluzione $\bar{x}(\varepsilon) = [(5+\varepsilon)/2, -(7+\varepsilon)/2]$. Affinché $\bar{y}$ sia ottima, la soluzione $\bar{x}(\varepsilon)$ deve rispettare gli altri due vincoli del problema primale, quindi

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -(5+\varepsilon)/2 - (7+\varepsilon)/2 \leq 0 & \Longrightarrow & \varepsilon \geq -6 \\ 2(5+\varepsilon)/2 + (7+\varepsilon)/2 \leq 1 & \Longrightarrow & \varepsilon \leq -5 \end{array} \right.$$

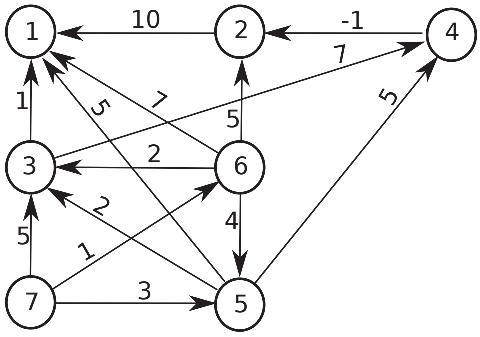
Pertanto la soluzione $\bar{y}$ è ottima per tutti i valori $\varepsilon \in [-6, -5]$. Si osservi che, per il teorema degli scarti complementari, $\bar{x}(\varepsilon) = [(5+\varepsilon)/2, -(7+\varepsilon)/2]$, per $\varepsilon \in [-6, -5]$, rappresenta quindi l'insieme di tutte e sole le soluzioni ottime del problema primale.

Per discutere l'unicità di $\bar{y}$ dobbiamo studiare l'insieme dei vincoli attivi $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{\, i \in \{1, \ldots, m\} \;:\; A_i\bar{x}(\varepsilon) = b_i \,\}$, per $\varepsilon \in [-6, -5]$. Tale insieme comprende sempre i vincoli 1 e 4. L'analisi precedente mostra che $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{1, 2, 4\}$ per $\varepsilon = -6$, $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{1, 4\}$ per $\varepsilon \in (-6, -5)$, e $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{1, 3, 4\}$ per $\varepsilon = -5$. Per tutti i valori $\varepsilon \in (-6, -5)$ $\{1, 4\}$ è una base primale ammissibile e non degenere: di conseguenza, $\bar{y}$ è l'unica soluzione ottima del duale.

Per $\varepsilon = -6$, $\bar{y}$ non è più l'unica soluzione ottima del duale. Infatti, sempre per le condizioni degli scarti complementari, tutte le soluzioni duali ammissibili tali che $y_3 = 0$ sono soluzioni ottime duali. Ponendo $y_3 = 0$ e $y_4 = \alpha$ nel sistema duale, si ottiene che le soluzioni ottime duali hanno forma $(3 + 2\alpha, \alpha, 0, 2 + \alpha)$, per $\alpha \geq 0$.

Similmente, per $\varepsilon = -5$ $\bar{y}$ non è più l'unica soluzione ottima del duale. Infatti, tutte le soluzioni duali ammissibili tali che $y_2 = 0$ sono soluzioni ottime duali. In particolare la soluzione di base duale $[0, 0, 6/5, 1/5]$, corrispondente alla base $\{3, 4\}$, è ottima in quanto ammissibile per il duale.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 7 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Durante l'algoritmo si esplorino gli archi della stella uscente del nodo selezionato in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si consideri poi il caso in cui il costo dell'arco $(5, 4)$ sia un parametro reale ϵ, e si discuta per quali valori del parametro la soluzione determinata resta un albero dei cammini minimi, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Rinumerando i nodi come segue

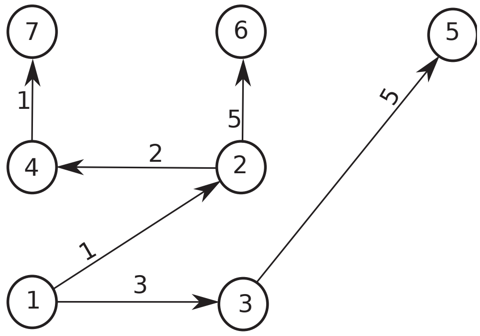
originale	1	2	3	4	5	6	7
rinumerato	7	6	4	5	3	2	1

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ anche in presenza di archi di costo negativo. Nello svolgimento si utilizzano i nomi dei nodi dopo la rinumerazione, e si riporta solamente il numero dell'iterazione, in quanto all'iterazione i-esima viene selezionato il nodo i. Si ricordi che SPT.Acyclic non fa ricorso ad alcuna struttura dati Q.

$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 6 \times 10 + 1 = 61.$

it.	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
0	*nil*	1	1	1	1	1	1	0	61	61	61	61	61	61
1	*nil*	1	1	1	1	1	1	0	1	3	5	61	61	61
2	*nil*	1	1	2	1	2	2	0	1	3	3	61	6	8
3	*nil*	1	1	2	3	2	3	0	1	3	3	8	6	8
4	*nil*	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4
5	*nil*	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4
6	*nil*	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4

Albero dei cammini minimi individuato (sul grafo rinumerato):

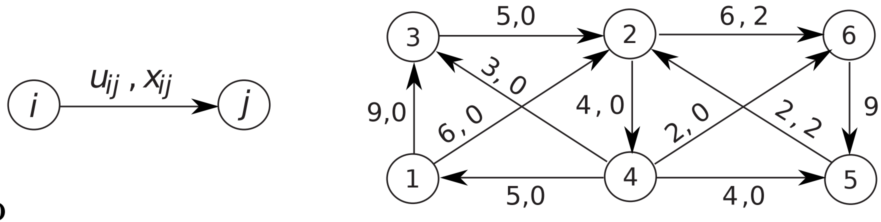


Dopo la rinumerazione, l'arco $(5, 4)$ diviene l'arco $(3, 5)$. Se il suo costo è un parametro reale ϵ, l'etichetta del nodo 5 diviene $3 + \epsilon$ in quanto l'arco $(3, 5)$ fa parte dell'albero dei cammini minimi individuato. Tale albero è ottimo per tutti e soli i valori di ϵ per cui gli archi esterni all'albero, e incidenti il nodo 5, soddisfano le condizioni di Bellman, ovvero:

$$(4, 5) : d[4] + c_{45} = 3 + 7 \geq 3 + \epsilon = d[5]$$

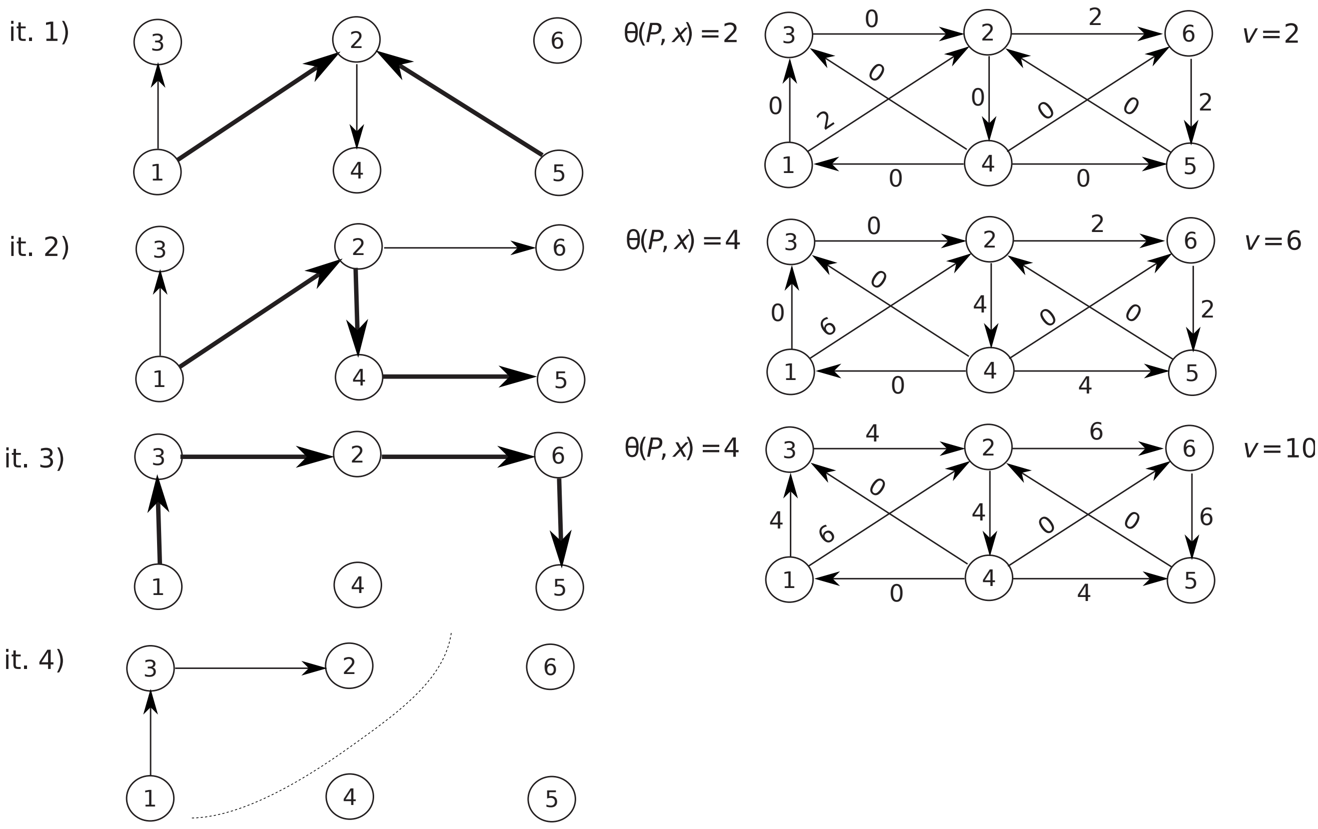
$$(5, 6) : d[5] + c_{56} = 3 + \epsilon - 1 \geq 6 = d[6] \quad \Longrightarrow \quad 4 \leq \epsilon \leq 7 \ .$$

4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). A ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine se la soluzione determinata sarebbe ancora ottima nel caso in cui l'arco $(5, 2)$ invertisse il proprio orientamento, diventando $(2, 5)$.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{24} + u_{26} = 4 + 6 = 10 = v$.



Se l'arco $(5, 2)$ invertisse il proprio orientamento, diventando $(2, 5)$, la soluzione individuata non sarebbe più ottima. Infatti, l'arco $(2, 5)$ sarebbe un arco diretto, non saturo, del taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$ determinato dall'algoritmo, e sarebbe possibile inviare un'ulteriore unità di flusso lungo il cammino aumentante $(1, 3, 2, 5)$, ottenendo un flusso di valore 11. Si osservi che tale flusso è massimo nel nuovo scenario, in quanto $u(\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})) = 11$.

5) Si consideri una rete di telecomunicazione descritta in termini di un grafo orientato $G = (N, A)$. In tale rete, il nodo sorgente s deve spedire una quantità di pacchetti α al nodo destinazione t. Gli archi della rete sono capacitati. A ogni collegamento $(i, j) \in A$ è infatti associata una capacità superiore u_{ij}, che indica il massimo numero di pacchetti inviabili lungo (i, j). Inoltre, a ogni arco $(i, j) \in A$ è associato un costo unitario d'invio (ovvero per pacchetto) c_{ij}.

Per evitare un'eccessiva dispersione dei pacchetti attraverso la rete, si vuole che il numero dei collegamenti utilizzati per l'invio sia non superiore a un valore dato $K \in Z^+$. Si formuli in termini di PLI il problema di inviare gli α pacchetti da s a t a costo minimo, rispettando i vincoli di capacità superiore e il vincolo relativo al numero di collegamenti utilizzabili per l'invio.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una variante dei problemi di flusso studiati durante il corso, in cui è presente una sorgente di flusso, ovvero il nodo s, una destinazione, ovvero il nodo t, e in cui la quantità di flusso che s deve inviare a t, pari al valore α, è nota a priori.

Per descrivere il problema introduciamo quindi una variabile di flusso x_{ij} per ogni collegamento (i, j), per denotare il numero di pacchetti (o flusso) che si deciderà di inviare lungo (i, j). Introduciamo inoltre le variabili binarie

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{ij} > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i, j) \in A.$$

Utilizzando tali variabili decisionali, il problema di flusso può essere formulato mediante il seguente modello PLI:

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} & \\
& \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -\alpha & \text{se } i = s \\ \alpha & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & i \in N \\
& x_{ij} \le u_{ij} y_{ij} & (i, j) \in A \\
& \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} y_{ij} \le K & \\
& x_{ij} \ge 0, x_{ij} \in Z & (i, j) \in A \\
& y_{ij} \in \{0, 1\} & (i, j) \in A
\end{array}$$

I primi vincoli sono i classici vincoli di conservazione di flusso, uno per nodo: garantiscono l'invio di α pacchetti da s a t. I vincoli successivi sono sia vincoli di capacità che vincoli logici. In particolare, se il flusso inviato lungo un arco (i, j) è positivo, allora la corrispondente variabile logica y_{ij} è forzata ad assumere il valore 1, segnalando in tal modo che l'arco (i, j) è utilizzato. Il vincolo seguente garantisce che il numero dei collegamenti utilizzati non ecceda il numero prefissato K. I vincoli finali definiscono le variabili x_{ij} come intere non negative, e le varibili y_{ij} come binarie.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} \max & 8x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +x_5 & +x_6 & & \\ & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +3x_6 & \leq & 13 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si discuta infine come cambierebbe la soluzione ottima del problema nel caso in cui la capacità dello zaino incrementasse al valore 16. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 1, 2/3, 0, 0]$, $\bar{z} = 20$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 1, 0]$, $\underline{z} = 19$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 19$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [1, 1, 3/4, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 19 + 3/4$, $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 17$. Poiché $\underline{z} = 17 < z = 19$, z non cambia. Si osservi inoltre che, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 19. Pertanto, poiché $\bar{z} = 19 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = \underline{z} = 19$. Il nodo viene pertanto chiuso per ottimalità (avrebbe potuto anche essere chiuso dalla valutazione superiore).

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch&Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 1, 0, 1, 0]$, di costo 19.

Se la capacità dello zaino incrementasse al valore 16, la soluzione ottima del rilassamento continuo, calcolata in corrispondenza del nodo radice dell'albero di enumerazione, sarebbe $x^* = [1, 1, 1, 1, 1, 0]$, di costo 22. Essendo binaria, tale soluzione è la soluzione ottima del problema nel caso di capacità pari a 16.