RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & - & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \end{array}$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base e la loro eventuale degenerazione, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: *i*) si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica; *ii*) si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{3,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y}_N = 0 \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La base è primale degenere perché B è incluso in $I(\bar{x}) = \{\, i \,:\, A_i\bar{x} = b_i \,\} = \{3, 4, 5\}$, e duale degenere perché $\bar{y}_4 = 0$.
$h = \min\{\, i \in B \,:\, \bar{y}_i < 0 \,\} = 3$, $B(h) = 1$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ A_N\xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{\, i \in N \,:\, A_i\xi > 0 \,\} = \{\, 1 \,,\, 2 \,,\, 5 \,\} \ , \ \lambda_i = (\, b_i - A_i\bar{x} \,) \,/\, A_i\xi \ , \ \lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 4 \ , \ \lambda_5 = 0$$

$$\bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = 0 \ , \ k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 5 \quad \text{[cambio di base degenere]}$$

it. 2) $B = \{4,5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale degenere e duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 1$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N\xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{\, 2 \,\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_2 = 4 \ , \ k = 2$$

it. 3) $B = \{2,5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale non degenere e duale degenere]

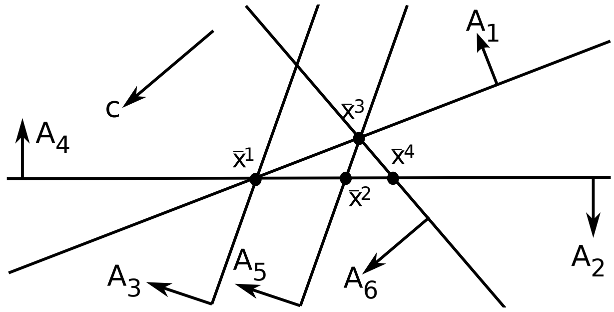
Poiché $y_B \geq 0$ segue che $\bar{x} = [\,4 \,,\, 2\,]$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $\bar{y} = [\,0 \,,\, 2 \,,\, 0 \,,\, 0 \,,\, 0\,]$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito.

i) Le soluzioni ottime del problema primale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il primale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $\bar{y} = [\,0 \,,\, 2 \,,\, 0 \,,\, 0 \,,\, 0\,]$. L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $\{\, 2 \,\}$. Di conseguenza, una soluzione primale che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve avere il secondo vincolo attivo. Affinché tale soluzione sia ammissibile per (P), essa deve quindi soddisfare il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & & & \leq & 4 \end{array} \right.$$

Posto $x_2 = \alpha$, il vincolo di uguaglianza richiede che le soluzioni abbiano la forma $x(\alpha) = [\, 2 + \alpha \,,\, \alpha \,]$. Tali soluzioni sono ammissibili se e solo se $\alpha \leq 2$, e pertanto sono ottime per il problema primale tutte e sole le soluzioni della forma $x(\alpha)$ per $\alpha \leq 2$. *ii*) Poiché la soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo è non degenere, segue che $\bar{y} = [\, 0 \,,\, 2 \,,\, 0 \,,\, 0 \,,\, 0 \,]$ è l'unica soluzione ottima del problema duale.

2) Si risolva graficamente il problema di PL in figura utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Si noti che le tre coppie c e A_6, A_3 e A_5, e A_2 e A_4 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. In caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni ottime, primale e duale.



SVOLGIMENTO

it. 1): $B = \{\,1\,,\,2\,\}$. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 > 0$ in quanto c è interno a cono(A_1, A_2), come mostrato in figura (a). La base è quindi duale non degenere, ma è primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^1) = \{\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^1$ viola i vincoli 5 e 6, pertanto

$$k = \min\{\; i \in N \;:\; A_i\bar{x} > b_i \;\} = \min\{\,5\,,\,6\,\} = 5$$

[regola anticiclo di Bland]. Poiché $A_5 \in$ cono$(\,A_1\,,\,A_2\,)$ e in particolare è interno, come mostrato in figura (a), si ha $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$. Risulta quindi non immediato determinare

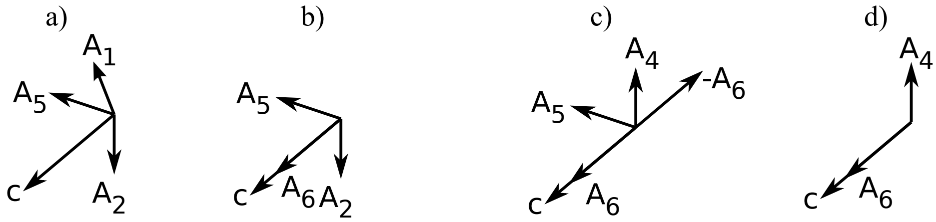
$$\bar{\theta} = \min\{\; \bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\; \eta_i > 0 \;\} \quad \text{e} \quad h = \min\{\; i \in B : \eta_i > 0,\; \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i \;\} \;.$$

Per rispondere si può notare che la base $\{\,1\,,\,5\,\}$ non è duale ammissibile, mentre $\{\,2\,,\,5\,\}$ lo è, quindi deve essere necessariamente $h = 1$.

it. 2): $B = \{\,2\,,\,5\,\}$. $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è interno a cono(A_2, A_5), come mostrato in figura (b). La base è quindi duale non degenere, come pure primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^2) = \{\,2\,,\,4\,,\,5\,\}$ (anche il vincolo 4 è attivo, pur non essendo in base). La soluzione di base primale $\bar{x}^2$ viola il solo vincolo 6, pertanto $k = 6$. Poiché A_6, essendo collineare con c, risulta interno a cono(A_2, A_5), si ha $\eta_2 > 0$ ed $\eta_5 > 0$. Si osservi inoltre che η_2 e η_5 sono multipli di $\bar{y}_2$ e $\bar{y}_5$, e quindi $\bar{y}_2/\eta_2 = \bar{y}_5/\eta_5$. Pertanto $h = 2$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 3): $B = \{\,5\,,\,6\,\}$. $\bar{y}_5 = 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è collineare con A_6 e ha lo stesso verso, come mostrato in figura (c). Pertanto la base è duale degenere, ed è ancora primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^3) = \{\,1\,,\,5\,,\,6\,\}$ (anche il vincolo 1 è attivo, pur non essendo in base). La soluzione di base primale $\bar{x}^3$ viola il solo vincolo 4, pertanto $k = 4$. A_4 è interno a cono$(A_5, -A_6)$, come mostrato in figura (c), pertanto $\eta_5 > 0$ e $\eta_6 < 0$, e quindi $h = 5$.

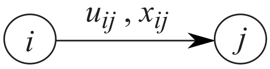
it. 4): $B = \{\,4\,,\,6\,\}$. $\bar{y}_4 = 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è collineare con A_6, come mostrato in figura (d). Pertanto la base è duale degenere, come pure primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^4) = \{\,2\,,\,4\,,\,6\,\}$ (anche il vincolo 2 è attivo, pur non essendo in base). La soluzione di base primale $\bar{x}^4$ non viola alcun vincolo, e pertanto è ottima per il problema primale, mentre la corrispondente soluzione di base duale è ottima per il problema duale.

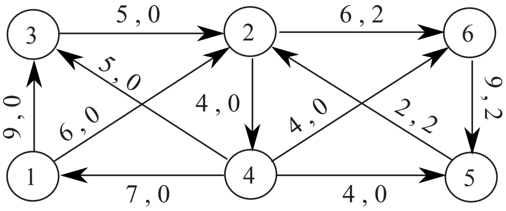


Per discutere l'unicità di $\bar{x}^4$ esaminiamo la degenerazione della base ottima determinata. Essa risulta duale degenere in quanto c è collineare con A_6, e pertanto la soluzione ottima primale potrebbe non essere unica. Ma questo non è il caso. Infatti, la regione ammissibile primale è una semiretta di estremo $\bar{x}^4$, individuata dalle rette corrispondenti al secondo e al quarto vincolo. Il vettore dei costi c non è ortogonale a tale semiretta, e pertanto non esistono altre soluzioni ottime primali oltre a quella individuata dall'algoritmo.

La base ottima è anche primale degenere, e quindi la soluzione ottima duale potrebbe non essere unica. Questo è in effetti il caso. Infatti, la soluzione ottima duale determinata è tale che $\bar{y}_6 > 0$ e $\bar{y}_i = 0$ per $i \neq 6$. Ma A_2 e A_4 sono collineari di verso opposto: pertanto, assumendo per semplicità (e senza perdita di generalità) che abbiano la stessa norma, ponendo $\tilde{y}_2 = \tilde{y}_4 = 1$ e $\tilde{y}_i = \bar{y}_i$ altrimenti, si può ottenere una diversa soluzione duale $\tilde{y} \geq 0$ tale che $\tilde{y}A = c$ (il contributo dei due vettori A_2 e A_4 si annulla reciprocamente) e in scarti complementari con $\bar{x}^4$. Pertanto, la soluzione ottima duale non è unica.

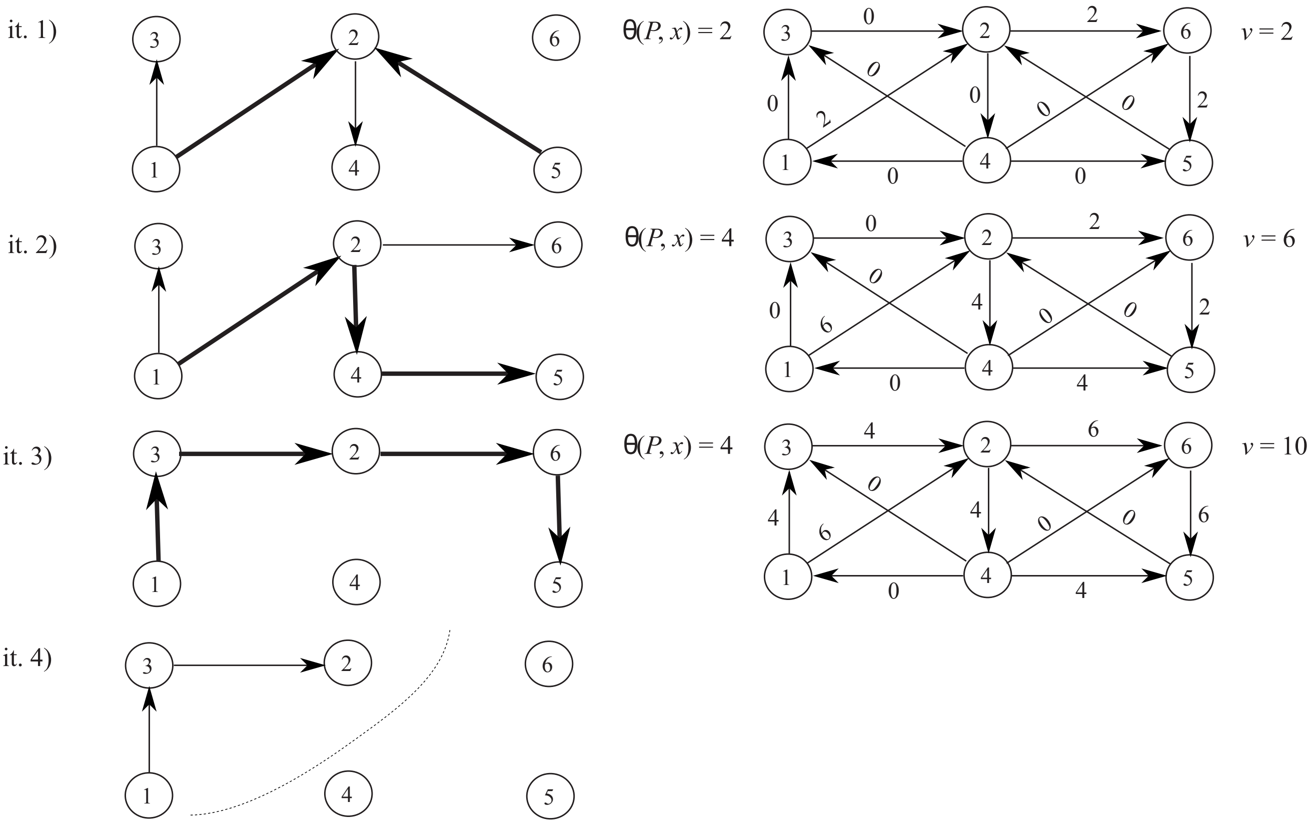
3) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine se il flusso determinato sarebbe ancora ottimo nel caso in cui l'arco $(5, 2)$ avesse capacità $u_{52} = 4$.





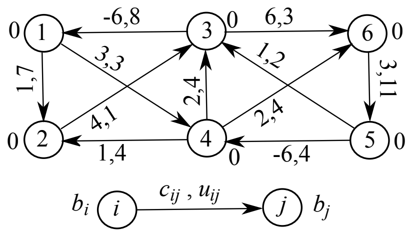
SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{24} + u_{26} = 4 + 6 = 10 = v$.



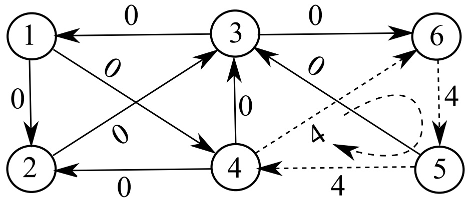
Se l'arco $(5, 2)$ avesse capacità $u_{52} = 4$, la soluzione ottima rimarrebbe invariata. Infatti l'arco $(5, 2)$ appartiene al taglio di capacità minima individuato dall'algoritmo, ma è in esso inverso. La sua capacità superiore non influenza quindi la capacità di tale taglio, che rimane invariata (ovvero $u(N_s, N_t) = 10$).

4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo, per l'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso nullo. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima. Giustificare le risposte.

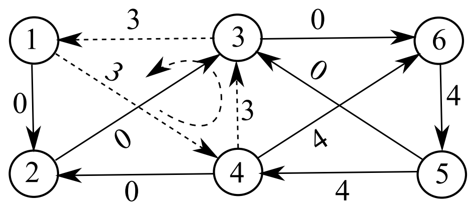


SVOLGIMENTO

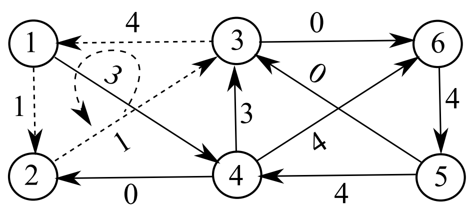
Si osservi che l'istanza ha tutti i bilanci nulli, ovvero si tratta di un problema *di circolazione*. Per tale motivo il flusso nullo, di costo zero, è una soluzione ammissibile. A partire da questa soluzione, l'algoritmo esegue tre iterazioni, illustrate dalle prime tre figure (da sinistra a destra, dall'alto in basso): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi tratteggiati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La quarta figura, in basso a destra, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione e il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



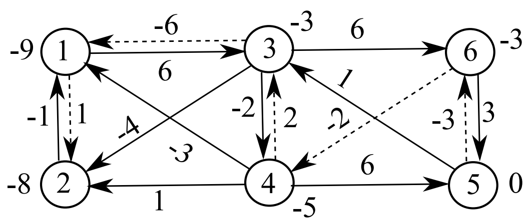
$\theta = 4$, $c(C) = -1$, $cx = -4$



$\theta = 3$, $c(C) = -1$, $cx = -7$



$\theta = 1$, $c(C) = -1$, $cx = -8$



5) Si enunci e si dimostri il Teorema Forte della Dualità.

SVOLGIMENTO L'enunciato del Teorema Forte della Dualità è il seguente. Sia data una coppia (P) e (D) di problemi duali in forma asimmetrica: se (P) e (D) ammettono entrambi soluzioni ammissibili, allora

$$z(P) = \max\{\, cx \;:\; Ax \leq b \,\} \;=\; \min\{\, yb \;:\; yA = c \,,\; y \geq 0 \,\} = z(D) \;\; .$$

La dimostrazione procede come segue.

Innanzitutto, per il Teorema debole della dualità, poiché (D) ammette soluzioni ammissibili, (P) non può essere (superiormente) illimitato. Essendo non vuoto, (P) ha pertanto ottimo finito e quindi almeno una soluzione ottima, che denotiamo con x^*. Segue che non possono esistere direzioni ξ ammissibili di crescita per x^* (vale in effetti anche l'implicazione inversa).

Se $c = 0$, allora $z(P) = 0$ e $y = 0$, ammissibile per (D), è quindi ottima; in questo caso il Teorema è quindi dimostrato. Assumiamo perciò $c \neq 0$, e denotiamo con I l'insieme degli indici dei vincoli attivi in x^*. È immediato notare che $I \neq \emptyset$. Infatti, se così non fosse, qualsiasi direzione sarebbe ammissibile per x^*, e quindi in particolare c $(\neq 0)$ sarebbe una direzione ammissibile di crescita.

Consideriamo adesso i sistemi *Primale Ristretto* e *Duale Ristretto* (ovvero primale e duale ristretti ai soli vincoli attivi), che caratterizzano le direzioni ammissibili di crescita per x^*:

$$(P_R) \quad \begin{cases} A_I\xi & \leq 0 \\ c\xi & > 0 \end{cases} \qquad\qquad (D_R) \quad \begin{cases} y_I A_I & = c \\ y_I & \geq 0. \end{cases}$$

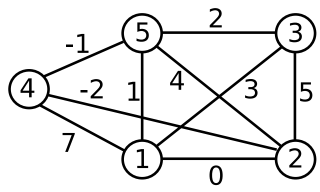
Poiché x^* è ottima, il sistema (P_R) non può avere soluzioni. Per il Lemma di Farkas, quindi, il sistema (D_R) ammette almeno una soluzione $\bar{y}_I$. La soluzione $\bar{y} = [\, \bar{y}_I \,,\, 0 \,]$ è pertanto ammissibile per (D), poiché $\bar{y}A = \bar{y}_I A_I = c$ e $\bar{y}_I \geq 0$ implica $\bar{y} \geq 0$.

Infine, è immediato verificare che $\bar{y}$ e x^* rispettano le *condizioni degli scarti complementari*, in quanto hanno lo stesso valore della funzione obiettivo (rispettivamente duale e primale). Per questo è sufficiente notare che

$$\bar{y}b = \bar{y}_I b_I = \bar{y}_I A_I x^* = cx^*$$

dove la seconda uguaglianza deriva dalla definizione di I e la terza dal fatto che $\bar{y}_I$ risolve (D_R). Segue che $\bar{y}$ è ottima per (D), e la tesi segue.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo Branch and Bound che usa il rilassamento MS1T, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di archi dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo) e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visiti l'albero delle decisioni in modo depth-first, ossia si implementi Q come una pila (o stack). Considerando il caso $r = 3$, si inseriscano in Q i figli del nodo i selezionato, avente grado 3 nell'MS1T, in ordine decrescente di j, dove (i, j) è l'arco la cui variabile è fissata a zero. Si ricordi che, essendo Q una pila, i nodi vengono estratti in ordine inverso rispetto a quello di inserzione. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni, compreso il nodo radice. Al termine si indichi la migliore valutazione superiore determinata, giusticando tutte le risposte.



SVOLGIMENTO Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 0$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile: pertanto $\underline{z} = 0 < +\infty = z$ e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il vertice 5 (che ha tre archi incidenti) e a creare tre figli, in ciascuno dei quali si fissa a zero la variabile corrispondente a uno di tali archi; per la strategia di visita stabilita, si inseriscono in Q nell'ordine $(4, 5)$, $(3, 5)$ e $(1, 5)$ (essendo Q una pila, verranno estratti nell'ordine inverso).

$\boxed{x_{15} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 2$, è mostrato in (b). Poiché è un ciclo Hamiltoniano, si pone $z = 2$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{35} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 1$, è mostrato in (c). Poiché $\underline{z} = 1 < 2 = z$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il vertice 1 (che ha tre archi incidenti), e creare tre figli fissando a zero, rispettivamente, la variabile relativa agli archi $(1, 5)$, $(1, 3)$, e $(1, 2)$.

$\boxed{x_{35} = 0,\ x_{12} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 5$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 5 > 2 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{35} = 0,\ x_{13} = 0}$ Poiché il nodo 3 ha un solo arco incidente nel sottografo risultante, in esso non può esistere nessun ciclo Hamiltoniano e il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{35} = 0,\ x_{15} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 4$, è mostrato in (e). Poiché $\underline{z} = 4 > 2 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

Poiché Q non è vuota, l'algoritmo viene interrotto anticipatamente. La migliore valutazione superiore determinata risulta essere $z = 2$.