RICERCA OPERATIVA (a.a. 2017/18)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0
\end{array}
$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante. In caso di ottimo finito: *i*) si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica; *ii*) si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} = 2, \quad B(h) = 2,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{3, 4, 5\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i \bar{x}) / A_i \xi, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = 2, \quad \bar{\lambda} = \min\{\lambda_i \ : \ i \in J\} = 0,$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = 4 \ \text{[cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{1, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 1, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{3, 5\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_3 = \lambda_5 = 2, \quad k = \min\{3, 5\} = 3 \ \text{[regola anticiclo di Bland]}$$

it.3) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 4, \quad B(h) = 2,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{5\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_5 = 0, \quad k = 5 \ \text{[cambio di base degenere]}$$

it.4) $B = \{3, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

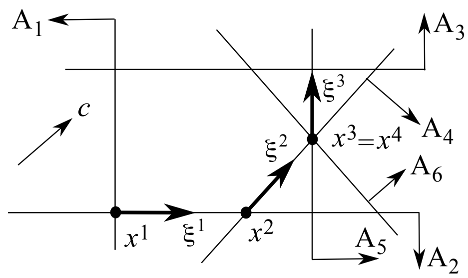
Poiché $\bar{y}_B \geq 0$, la soluzione $\bar{x} = [0, -1]$ è ottima per il problema dato, mentre $\bar{y} = [0, 0, 1, 0, 1]$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito. *i*) Essendo la soluzione ottima duale individuata non degenere, segue che $\bar{x} = [0, -1]$ è l'unica soluzione ottima del problema primale. *ii*) Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il duale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x} = [0, -1]$. È immediato verificare che l'insieme degli indici dei vincoli attivi per $\bar{x} = [0, -1]$ è $I(\bar{x}) = \{3, 4, 5\}$.

Di conseguenza una soluzione duale y, tale che $yA = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $y_1 = y_2 = 0$. Affinché y sia ammissibile per (D), essa deve inoltre soddisfare il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -y_3 \qquad\qquad -y_5 = -2 \\ -y_3 \quad -y_4 \qquad\qquad = -1 \\ y_3, \quad y_4, \quad y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(1-\alpha, \alpha, 1+\alpha)$, per $0 \leq \alpha \leq 1$. Pertanto, le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni aventi forma $y(\alpha) = (0, 0, 1-\alpha, \alpha, 1+\alpha)$, per $0 \leq \alpha \leq 1$.

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Si noti che c è collineare ad A_6 e perpendicolare ad A_4; inoltre, A_1 e A_5 sono collineari, come pure A_2 e A_3. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Al termine, se il problema ammette ottimo finito: *i*) si discuta l'unicità della soluzione ottima primale determinata; *ii*) si indichi se la soluzione ottima primale determinata resterebbe ottima nello scenario $c = A_5$, e si discuta la sua eventuale unicità. Giustificare le risposte.



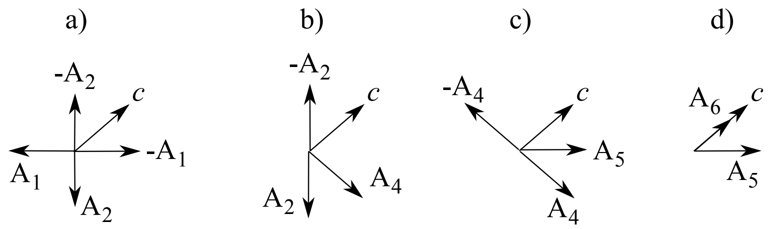
SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$. $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e $-A_2$, come mostrato in *a*). Quindi $h = 1$ per la regola anticiclo di Bland. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del vincolo 4, quindi $k = 4$.

it. 2) $B = \{2, 4\}$, $y_2 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_2$ ed A_4, come mostrato in *b*). Quindi $h = 2$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 5 e 6. Quindi $k = 5$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 3) $B = \{4, 5\}$, $y_4 < 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_4$ e A_5, come mostrato in *c*). Quindi $h = 4$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza del vincolo 6, attivo ma non in base. Quindi $k = 6$ e si esegue un cambio di base degenere.

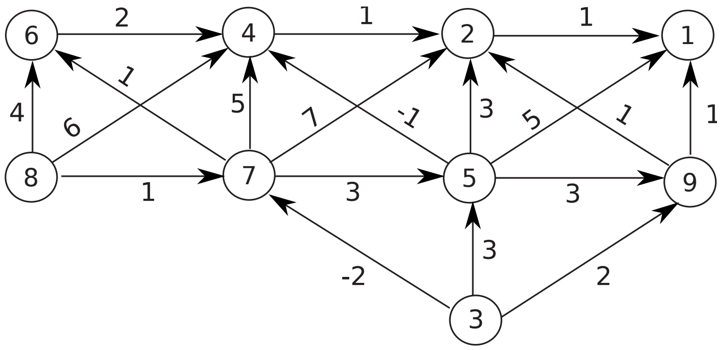
it. 4) $B = \{5, 6\}$, $y_5 = 0$ e $y_6 > 0$ poiché c è collineare ad A_6, come mostrato in *d*). La base è quindi sia primale che duale ammissibile, e l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima per entrambi i problemi.



i) Per discutere l'unicità della soluzione ottima primale determinata possiamo utilizzare il teorema degli scarti complementari. Poiché la base ottima individuata è duale degenere ($y_5 = 0$), la soluzione ottima primale potrebbe non essere unica. In effetti, tutti i punti del lato del poliedro individuato dal vincolo 6, avente x^4 come estremo, sono soluzioni primali ottime alternative, avendo lo stesso valore della funzione obiettivo di x^4 (essendo c collineare ad A_6).

ii) Se $c = A_5$, la soluzione ottima primale x^4 continuerebbe a restare ottima. Infatti, $\{4, 5\}$, $\{5, 6\}$ e $\{4, 6\}$ sarebbero tutte basi ottime. Nel caso $c = A_5$, tuttavia, x^4 sarebbe l'unica soluzione ottima primale, come è immediato verificare per via geometrica.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 8 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato e se ne discuta l'unicità.



SVOLGIMENTO

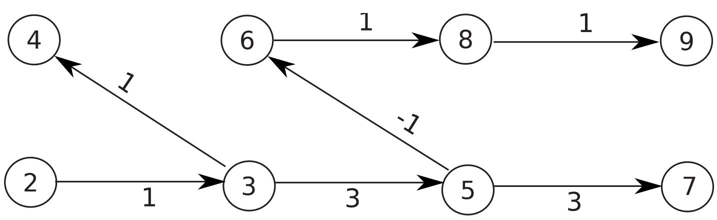
Rinumerando i nodi come segue

originale	1	2	3	4	5	6	7	8	9
rinumerato	9	8	1	6	5	4	3	2	7

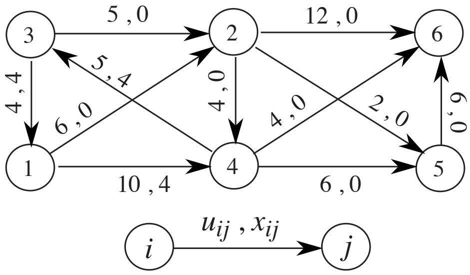
si dimostra che il grafo è aciclico: infatti per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si utilizzano i nomi dei nodi dopo la rinumerazione, e si riporta solamente il numero del nodo selezionato. Inoltre, non vengono riportate informazioni relative all'insieme Q in quanto non utilizzato dall'algoritmo. Poiché la radice 8 è rinumerata come nodo 2, l'algoritmo inizia a iterare da $u = 2$. Il nodo 1 non è quindi raggiungibile dalla radice.
$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 8 \times 7 + 1 = 57$.

	$p[\cdot]$									$d[\cdot]$								
u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2	*nil*	2	2	2	2	2	2	2	57	0	57	57	57	57	57	57	57
2	2	*nil*	2	2	2	2	2	2	2	57	0	1	4	57	6	57	57	57
3	2	*nil*	2	3	3	2	2	3	2	57	0	1	2	4	6	57	8	57
4	2	*nil*	2	3	3	4	2	3	2	57	0	1	2	4	4	57	8	57
5	2	*nil*	2	3	3	5	5	5	5	57	0	1	2	4	3	7	7	9
6	2	*nil*	2	3	3	5	5	6	5	57	0	1	2	4	3	7	4	9
7	2	*nil*	2	3	3	5	5	6	7	57	0	1	2	4	3	7	4	8
8	2	*nil*	2	3	3	5	5	6	8	57	0	1	2	4	3	7	4	5

Di seguito si riporta l'albero dei cammini minimi individuato (di radice 2, sul grafo rinumerato). Tale albero è l'unica soluzione ottima del problema. Infatti, tutti gli archi non appartenenti all'albero rispettano le condizioni di Bellman come stretta disuguaglianza.

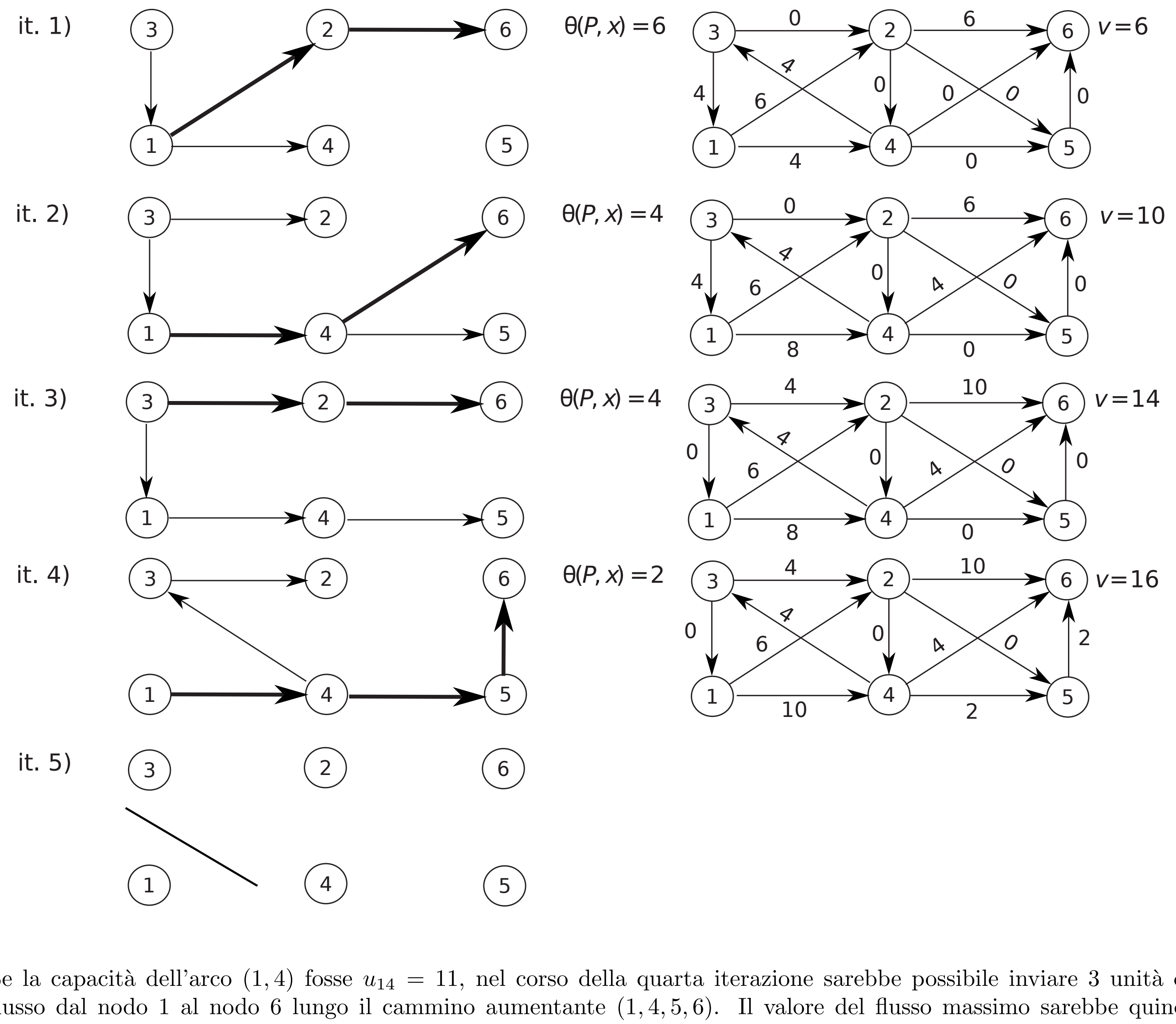


4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine quali sarebbero il valore del flusso massimo e il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo qualora la capacità dell'arco $(1, 4)$ fosse $u_{14} = 11$.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{14} = 6 + 10 = 16 = v$.



Se la capacità dell'arco $(1, 4)$ fosse $u_{14} = 11$, nel corso della quarta iterazione sarebbe possibile inviare 3 unità di flusso dal nodo 1 al nodo 6 lungo il cammino aumentante $(1, 4, 5, 6)$. Il valore del flusso massimo sarebbe quindi $v = 17$. $(N_s, N_t) = (\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\})$ continuerebbe ad essere un taglio di capacità minima, in quanto si avrebbe $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{14} = 6 + 11 = 17 = v$

5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$(P) \quad \max\{\ cx\ :\ Ax \leq b,\ x \leq 0\ \}.$$

Supponiamo che il sistema

$$(S) \quad \begin{cases} A\xi & \leq & 0 \\ \xi & \leq & 0 \\ c\xi & > & 0 \end{cases}$$

ammetta una soluzione $\bar{\xi} \in R^n$. Dimostrare che se (P) è non vuoto, allora è superiormente illimitato.

SVOLGIMENTO

Sia $\bar{x}$ una qualsiasi soluzione ammissibile per (P) e consideriamo $x(\lambda) := \bar{x} + \lambda\bar{\xi}$. Tale soluzione risulta essere ammissibile per (P) per ogni $\lambda \geq 0$; infatti:

$$Ax(\lambda) = A\bar{x} + \lambda A\bar{\xi} \leq A\bar{x} \leq b$$

e

$$x(\lambda) = \bar{x} + \lambda\bar{\xi} \leq \bar{x} \leq 0$$

dove le prime disuguaglianze di entrambe le espressioni seguono dal fatto che $\bar{\xi}$ risolve (S) e $\lambda \geq 0$, mentre le seconde dall'ammissibilità di $\bar{x}$. Inoltre, il valore della funzione obiettivo cresce indefinitamente al crescere di λ:

$$cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda c\bar{\xi} \longrightarrow +\infty \quad \text{per} \quad \lambda \longrightarrow +\infty$$

in quanto $c\bar{\xi} > 0$.

$\bar{\xi}$ è quindi una direzione ammissibile di crescita illimitata per (P), che pertanto è superiormente illimitato.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lllllll} \max 8x_1 & +15x_2 & +7x_3 & +4x_4 & +x_5 & +2x_6 & & \\ 3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 15 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Si discuta infine se la soluzione ottima determinata resterebbe ottima anche nel caso di capacità dello zaino pari a 14, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili non sono ordinate per Costo Unitario Decrescente (CUD). L'ordine CUD è: x_2, x_1, x_3, x_4, x_6, x_5.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1,1,1,1,0,1/2]$, $\bar{z} = 35$, $\bar{x} = [1,1,1,1,0,0]$, $\underline{z} = 34$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 34$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_6.

$\boxed{x_6 = 1}$ $x^* = [1,1,1,2/3,0,1]$, $\bar{z} = 34 + 2/3$, $\bar{x} = [1,1,1,0,1,1]$, $\underline{z} = 33$. Poiché $\underline{z} = 33 < z = 34$, z non cambia. Si osservi inoltre che, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 34. Pertanto, poiché $\bar{z} = 34 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_6 = 0}$ $x^* = [1,1,1,1,1/2,0]$, $\bar{z} = 34 + 1/2$, $\bar{x} = [1,1,1,1,0,0]$, $\underline{z} = 34$. Poiché $\underline{z} = 34 = z$, z non cambia. Anche in questo caso inoltre, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 34. Pertanto, poiché $\bar{z} = 34 = \underline{z}$, il nodo viene chiuso per ottimalità (come pure dalla valutazione superiore).

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch&Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1,1,1,1,0,0]$, di costo 34. Tale soluzione è ammissibile anche nel caso in cui la capacità dello zaino sia 14. Si osservi inoltre che il problema di zaino risolto mediante l'algoritmo Branch&Bound è un rilassamento del problema di zaino con capacità pari a 14. Di conseguenza, poiché la soluzione ottima di tale rilassamento è ammissibile per il problema con capacità 14, e la funzione obiettivo è invariata, segue che la soluzione $[1,1,1,1,0,0]$ è ottima anche per lo scenario con capacità 14.