RICERCA OPERATIVA (a.a. 2017/18)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & -4x_1 & + & 2x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base e la loro eventuale degenerazione, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del *PL* dato. Si consideri, inoltre, l'ultima direzione ξ individuata dall'algoritmo: se il vettore dei costi c fosse $[0, 2]$ invece che $[-4, 2]$, ξ sarebbe ancora di crescita? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{2,3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y}_N = 0 \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale degenere e duale non degenere] $h = \min\{\, i \in B \,:\, y_i < 0 \,\} = \min\{2, 3\} = 2$, $B(h) = 1$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{1, 4\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i \bar{x}) / A_i \xi \ , \ \lambda_1 = 4 \ , \ \lambda_4 = 0 \ , \ \bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = 0$$

$$k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 4 \quad \text{[cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{3,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale degenere e duale non degenere] $h = 3$, $B(h) = 1$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{1\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_1 = 4 \ , \ k = 1$$

it.3) $B = \{1,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix} \ , \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale non degenere e duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \emptyset$$

STOP. ξ è una direzione di crescita illimitata, pertanto il problema primale è superiormente illimitato e di conseguenza la regione ammissibile del problema duale è vuota. Se il vettore dei costi c fosse $[0, 2]$ invece che $[-4, 2]$ si avrebbe $c\xi = -2$, e pertanto la direzione ξ sarebbe di decrescita.

2) Si risolva il seguente problema di *PL* applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: *i)* si individui l'insieme delle soluzioni ottime primali; *ii)* si discuta se la soluzione $y^* = [0, 2, 0, 1, 0]$ sia una soluzione duale ottima alternativa a quella individuata dall'algoritmo. Giustificare le risposte.

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{\, i \in N : A_i \bar{x} > b_i \,\} = 4$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\, \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0 \,\} = 1/3,$$

$$h = \min\{\, i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i \,\} = 1$$

it. 2) $B = \{3, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{STOP.}$$

Poiché la soluzione di base primale è ammissibile, l'algoritmo termina individuando la soluzione ottima primale $\bar{x} = [2, 0]$ e la soluzione ottima duale $\bar{y} = [0, 0, 2/3, 1/3, 0]$.

i) Si osservi che la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo è non degenere. Segue che $\bar{x} = [2, 0]$ è l'unica soluzione ottima primale.

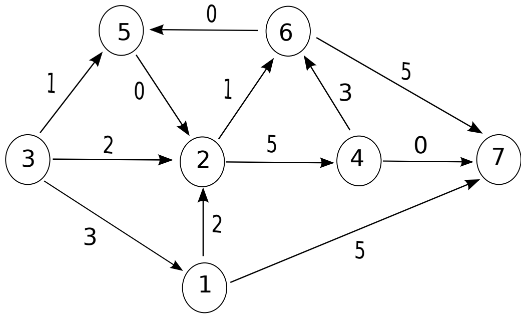
ii) La soluzione ottima primale è degenere in quanto $I(\bar{x}) = \{2, 3, 4, 5\}$. E' quindi possibile che esistano soluzioni ottime duali alternative. In particolare, $y^* = [0, 2, 0, 1, 0]$ è la soluzione di base, duale ammissibile, corrispondente alla base $B' = \{2, 4\}$, base alternativa per $\bar{x} = [2, 0]$. Le componenti in base di y^*, ovvero la seconda e la quarta componente, sono infatti calcolabili mediante:

$$cA_{B}'^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto $y^* = [0, 2, 0, 1, 0]$ è una soluzione duale ottima alternativa a quella individuata dall'algoritmo.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 3 sul grafo in figura utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.

Nel caso in cui il costo dell'arco $(4, 7)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 0, come in figura), per quali valori di tale parametro l'albero individuato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3? E per quali valori di ϵ tale albero sarebbe l'unico albero dei cammini minimi di radice 3? Giustificare le risposte.



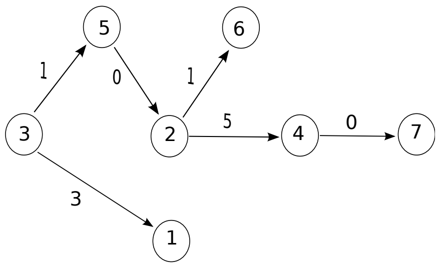
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene il ciclo $(2, 6, 5)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31.$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		3	3	*nil*	3	3	3	3	31	31	0	31	31	31	31	$\{3\}$
1	3	3	3	*nil*	3	3	3	3	3	2	0	31	1	31	31	$\{1, 2, 5\}$
2	5	3	5	*nil*	3	3	3	3	3	1	0	31	1	31	31	$\{1, 2\}$
3	2	3	5	*nil*	2	3	2	3	3	1	0	6	1	2	31	$\{1, 4, 6\}$
4	6	3	5	*nil*	2	3	2	6	3	1	0	6	1	2	7	$\{1, 4, 7\}$
5	1	3	5	*nil*	2	3	2	6	3	1	0	6	1	2	7	$\{4, 7\}$
6	4	3	5	*nil*	2	3	2	4	3	1	0	6	1	2	6	$\{7\}$
7	7	3	5	*nil*	2	3	2	4	3	1	0	6	1	2	6	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:



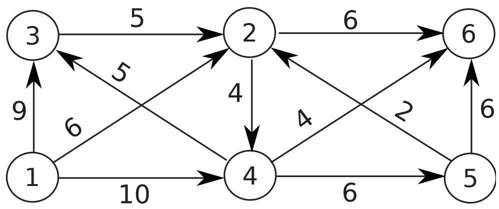
Se il costo dell'arco $(4, 7)$ fosse pari a un parametro reale ϵ, l'albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3 per tutti e soli i valori di ϵ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman. Si osservi che, in tal caso, si avrebbe $d(7) = 6 + \epsilon$. Occorrerebbe quindi garantire che, per tutti gli archi esterni all'albero, ed incidenti il nodo 7, tali condizioni continuino ad essere rispettate:

- $d(6) + 5 \geq d(7)$, ovvero $2 + 5 \geq 6 + \epsilon$
- $d(1) + 5 \geq d(7)$, ovvero $3 + 5 \geq 6 + \epsilon$.

Segue che l'albero determinato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3 se e solo se $\epsilon \leq 1$.

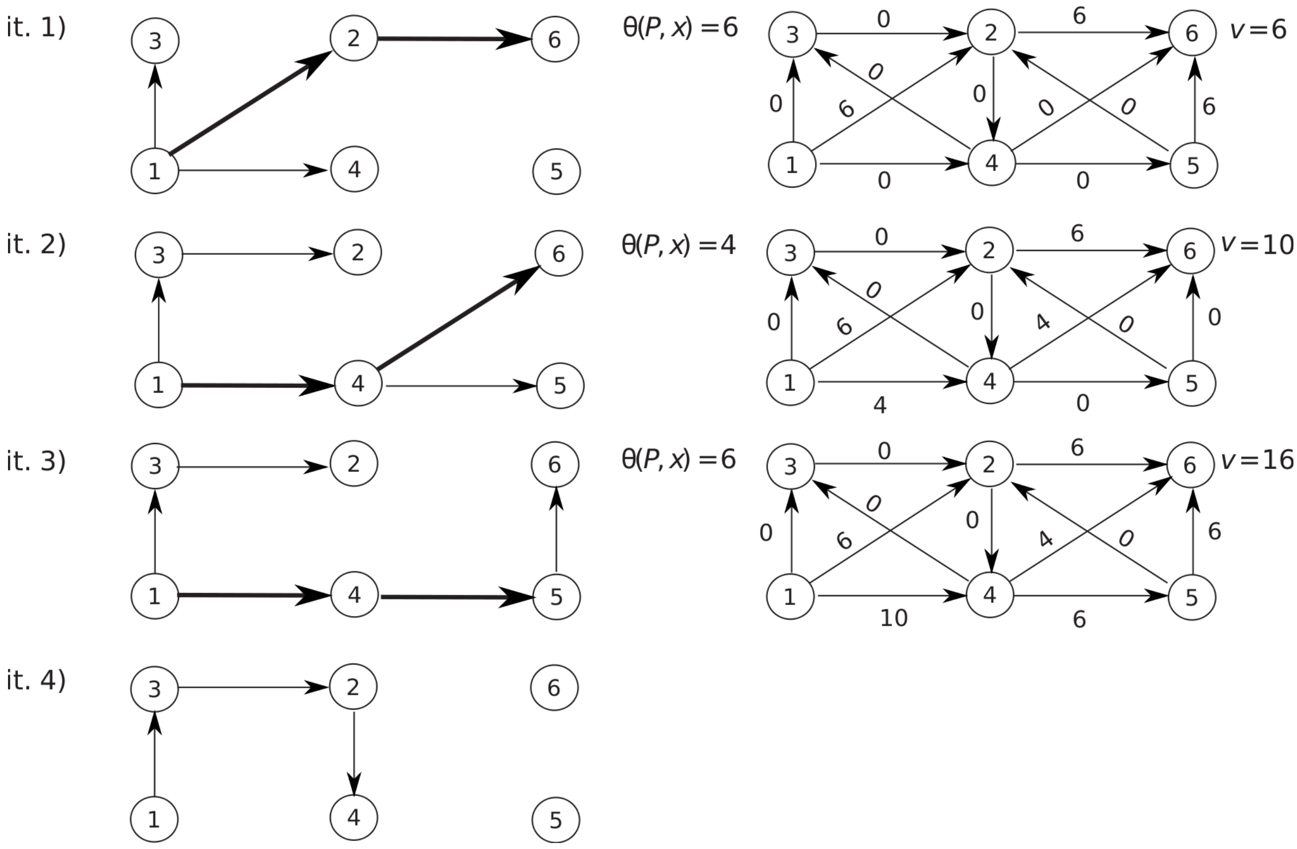
Poiché per $\epsilon = 1$ le condizioni di Bellman relative all'arco $(6, 7)$ valgono in forma di uguaglianza e $(6, 7)$ può sostituire $(4, 7)$ nell'albero, si ha che l'albero determinato sarebbe l'unico albero dei cammini minimi di radice 3 per $\epsilon < 1$ (si osservi che, per gli archi non incidenti il nodo 7, le condizioni di Bellman valgono in forma di disuguaglianza stretta).

4) Si individui un flusso massimo dal nodo sorgente 1 al nodo destinazione 6, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Come cambierebbe il valore del flusso massimo se l'arco (1,3) venisse cancellato dalla rete? Giustificare le risposte.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni dell'algoritmo sono rappresentate nel seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{26} + u_{46} + u_{45} = 6 + 4 + 6 = 16 = v$.



Se l'arco (1,3) venisse cancellato dalla rete il valore del flusso massimo sarebbe sempre pari a 16 in quanto il flusso massimo determinato non utilizza tale arco (il flusso corrispondente è 0), e $(\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ sarebbe sempre un taglio di capacità (minima) 16. In tale caso, tuttavia, l'algoritmo individuerebbe il taglio di capacità minima alternativo $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\})$.

5) Si consideri il seguente modello matematico:

$$\begin{array}{ll} \max & \min\{2x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 + 4x_2 - 2x_3\} \\ & x_1 \in \{0, 1\} \\ & x_2 \in \{3, 8, 11\} \\ & x_1 = 1 \Rightarrow x_3 \in [10, 15] \\ & x_1 = 0 \Rightarrow x_3 = 0. \end{array}$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli in termini di Programmazione Lineare Intera (*PLI*). Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il modello matematico proposto non è PLI in quanto:

- la funzione obiettivo non è lineare (bensì è definita come il minimo di due funzioni lineari)
- la variabile x_2 è una variabile a valori discreti
- sono presenti implicazioni logiche che legano la variabile x_3 alla variabile binaria x_1; si noti, inoltre, che x_3 è definita in termini di una minima quantità positiva prefissata.

Il modello può comunque essere (ri)formulato in termini di PLI nel modo seguente:

$$\begin{array}{ll} \max & z \\ & z \leq 2x_1 - x_2 + x_3 \\ & z \leq 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ & x_1 \in \{0, 1\} \\ & x_2 = 3y_1 + 8y_2 + 11y_3 \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \\ & 10x_1 \leq x_3 \leq 15x_1 \end{array}$$

La variabile di soglia z, infatti, permette di stimare per difetto il minimo tra i valori restituiti dalle funzioni lineari $2x_1 - x_2 + x_3$ e $3x_1 + 4x_2 - 2x_3$. Massimizzando z, il solutore attribuisce pertanto a x_1, x_2 e x_3 quei valori (ammissibili) che massimizzano il minimo valore restituito dalle due funzioni lineari.

Le variabili binarie ausiliarie y_1, y_2 e y_3 permettono di formulare la variabile a valori discreti x_2 utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso. Infine, l'ultimo vincolo del modello PLI garantisce che, se $x_1 = 0$, allora la variabile x_3 sia forzata ad assumere il valore zero, mentre se $x_1 = 1$ la variabile x_3 possa assumere valori nell'intervallo [10, 15] (tecnica standard per definire una minima quantità positiva prefissata, utilizzando in questo frangente la variabile binaria x_1 e il suo legame con la variabile x_3).

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrcc}
\max 8x_1 & +15x_2 & +7x_3 & +4x_4 & +x_5 & +2x_6 & & \\
3x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 14 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Si discuta infine se la soluzione ottima determinata resterebbe ottima anche nel caso di capacità dello zaino pari a 13, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili non sono ordinate per Costo Unitario Decrescente (CUD). L'ordine CUD è: x_2, x_1, x_3, x_4, x_6, x_5.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 1, 1, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 35$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 34$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 34$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_6.

$\boxed{x_6 = 1}$ $x^* = [1, 1, 1, 1/2, 0, 1]$, $\bar{z} = 34$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 1]$, $\underline{z} = 32$. Poiché $\underline{z} = 32 < z = 34$, z non cambia. Inoltre, poiché $\bar{z} = 34 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_6 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 1, 1/2, 0]$, $\bar{z} = 34 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 34$. Poiché $\underline{z} = 34 = z$, z non cambia. Si osservi inoltre che, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 34. Pertanto, poiché $\bar{z} = 34 = \underline{z}$, il nodo viene chiuso per ottimalità (come pure dalla valutazione superiore).

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch&Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 1, 1, 0, 0]$, di costo 34. Tale soluzione è ammissibile anche nel caso in cui la capacità dello zaino sia 13. Si osservi inoltre che il problema di zaino risolto mediante l'algoritmo Branch&Bound è un rilassamento del problema di zaino con capacità pari a 13. Di conseguenza, poiché la soluzione ottima di tale rilassamento è ammissibile per il problema con capacità 13, e la funzione obiettivo è invariata, segue che la soluzione $[1, 1, 1, 1, 0, 0]$ è ottima anche per lo scenario con capacità 13.