

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2014/15)**Nome:****Cognome:****Matricola:**

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & + & x_2 \\ & & & x_2 \leq 4 \\ & x_1 & - & 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 & + & x_2 \leq 4 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & -x_1 & + & x_2 \leq -2 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplex Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k , il vettore η_B , il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h , giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

$$\text{it. 1) } B = \{1, 4\}: A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 1], \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0],$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{3, 5\} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 2],$$

$$\bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B, \eta_i > 0\} = 1/2, \quad h = \min\{i \in B : \eta_i > 0, \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\} = 4$$

$$\text{it. 2) } B = \{1, 3\}: A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1/2 \quad 1/2], \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = [1/2 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0],$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 5,$$

$$\eta_B = [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [3/2 \quad -1/2], \quad \bar{\theta} = 1/3, \quad h = 1$$

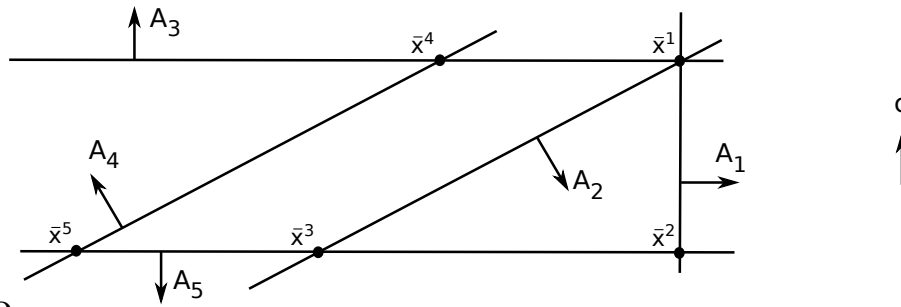
$$\text{it. 3) } B = \{3, 5\}: A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_B = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = [2/3 \quad 1/3], \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = [0 \quad 0 \quad 2/3 \quad 0 \quad 1/3],$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

$B = \{3, 5\}$ è una base ottima: $\bar{x} = (2, 0)$ è una soluzione ottima per il problema primale, mentre $\bar{y} = (0, 0, 2/3, 0, 1/3)$ è una soluzione ottima per il problema duale. Osserviamo che la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo è non degenera. Segue che $\bar{x} = (2, 0)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale.

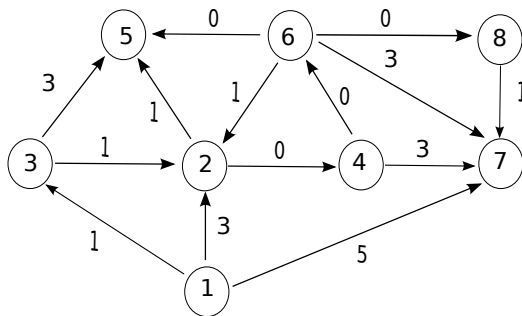
2) Si consideri l'istanza di PL rappresentata in figura; si noti che A_3 , A_5 e c sono collineari, ed anche A_2 ed A_4 lo sono. Per ogni possibile coppia di vincoli si specifichi se la base corrispondente sia primale e/o duale ammissibile, primale e/o duale degenerare. Giustificare le risposte.



SVOLGIMENTO

1. $B_1 = \{1, 2\}$. La soluzione primale di base \bar{x}^1 (mostrata in figura) è ammissibile, quindi B_1 è primale ammissibile. Poiché $I(\bar{x}^1) = \{1, 2, 3\} \supset B_1$, B_1 è primale degenerare. Poiché $c \in \text{cono}(A_1, -A_2)$, $\bar{y}_1^1 > 0$ e $\bar{y}_2^1 < 0$; quindi B_1 è duale non ammissibile. Siccome c è interna al cono (nessuna delle due componenti di base di \bar{y}^1 è nulla), B_1 è duale non degenerare.
2. $B_2 = \{1, 3\}$. La soluzione primale di base è ancora \bar{x}^1 : quindi B_2 è ancora primale ammissibile e primale degenerare. Poiché c è collineare ad A_3 ed ha lo stesso verso, $\bar{y}_1^2 = 0$ e $\bar{y}_3^2 > 0$; quindi B_2 è duale ammissibile, ma duale degenerare.
3. $B_3 = \{1, 4\}$. La soluzione primale di base non è visibile in figura; comunque è chiaramente esterna alla regione ammissibile, quindi B_3 è primale non ammissibile. Chiaramente non ci sono altri vincoli attivi nella soluzione primale di base, quindi B_3 è primale non degenerare. Poiché c è interna a $\text{cono}(A_1, A_4)$, $\bar{y}_1^3 > 0$ e $\bar{y}_4^3 > 0$; quindi, B_3 è duale ammissibile e duale non degenerare.
4. $B_4 = \{1, 5\}$. La soluzione primale di base \bar{x}^2 (mostrata in figura) è esterna alla regione ammissibile, quindi B_4 è primale non ammissibile. Poiché $I(\bar{x}^2) = \{1, 5\} = B_4$, B_4 è primale non degenerare. Poiché c è collineare ad A_5 ed ha verso opposto, $\bar{y}_1^4 = 0$ e $\bar{y}_5^4 < 0$; quindi B_4 è duale non ammissibile e duale degenerare.
5. $B_5 = \{2, 3\}$. La soluzione primale di base è ancora \bar{x}^1 : quindi B_5 è ancora primale ammissibile e primale degenerare. Con gli stessi argomenti di B_2 si mostra che anche B_5 è duale ammissibile, ma duale degenerare.
6. $B_6 = \{2, 4\}$ non è una base: A_2 ed A_4 sono linearmente dipendenti.
7. $B_7 = \{2, 5\}$. La soluzione primale di base \bar{x}^3 (mostrata in figura) è ammissibile, quindi B_7 è primale ammissibile. Poiché $I(\bar{x}^3) = B_7$, B_7 è primale non degenerare. Con gli stessi argomenti di B_4 si mostra che anche B_7 è duale non ammissibile e duale degenerare.
8. $B_8 = \{3, 4\}$. La soluzione primale di base \bar{x}^4 (mostrata in figura) è ammissibile, quindi B_8 è primale ammissibile. Poiché $I(\bar{x}^4) = B_8$, B_8 è primale non degenerare. Con gli stessi argomenti di B_5 si mostra che anche B_8 è duale ammissibile ma duale degenerare.
9. $B_9 = \{3, 5\}$ non è una base: A_3 ed A_5 sono linearmente dipendenti.
10. $B_{10} = \{4, 5\}$. La soluzione primale di base \bar{x}^5 (mostrata in figura) è ammissibile, quindi B_{10} è primale ammissibile. Poiché $I(\bar{x}^5) = B_{10}$, B_{10} è primale non degenerare. Con gli stessi argomenti di B_4 si mostra che anche B_{10} è duale non ammissibile e duale degenerare.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura.



Si utilizzi l’algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u , i vettori dei predecessori e delle etichette, e l’insieme dei nodi candidati Q . Al termine si disegni l’albero dei cammini minimi individuato. Nel caso in cui il costo dell’arco $(6, 5)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 0, come in figura), per quali valori di tale parametro l’albero individuato al passo precedente continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 1? Giustificare la risposta.

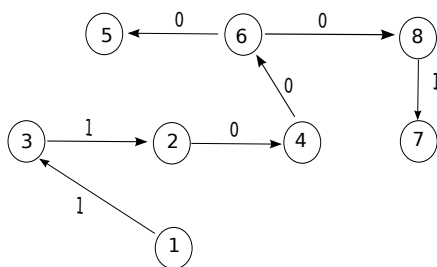
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene il ciclo $(2, 4, 6)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l’algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l’algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 7 \times 5 + 1 = 36.$$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$p[8]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$d[8]$	Q	
0		nil	1	1	1	1	1	1	1	0	36	36	36	36	36	36	36	36	(1)
1	1	nil	1	1	1	1	1	1	1	0	3	1	36	36	36	5	36	36	(2, 3, 7)
2	3	nil	3	1	1	3	1	1	1	0	2	1	36	4	36	5	36	36	(2, 5, 7)
3	2	nil	3	1	2	2	1	1	1	0	2	1	2	3	36	5	36	36	(4, 5, 7)
4	4	nil	3	1	2	2	4	1	1	0	2	1	2	3	2	5	36	36	(5, 6, 7)
5	6	nil	3	1	2	6	4	1	6	0	2	1	2	2	2	5	2	36	(5, 7, 8)
6	5	nil	3	1	2	6	4	1	6	0	2	1	2	2	2	5	2	36	(7, 8)
7	8	nil	3	1	2	6	4	8	6	0	2	1	2	2	2	3	2	36	(7)
8	7	nil	3	1	2	6	4	8	6	0	2	1	2	2	2	3	2	36	\emptyset

L’albero trovato è mostrato in figura:



Se il costo dell’arco $(6, 5)$ fosse pari a un parametro reale ϵ , l’etichetta del nodo 5 varrebbe $d[5] = 2 + \epsilon$. L’albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli i valori di ϵ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman. Considerando i due archi del grafo non appartenenti all’albero ed incidenti il nodo 5, ovvero $(2, 5)$ e $(3, 5)$, si ottiene che l’albero determinato è un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se $\epsilon \leq 1$.

4) Si consideri una rete di telecomunicazione descritta in termini di un grafo orientato $G = (N, A)$. In tale rete, il nodo sorgente s deve spedire una quantità di pacchetti γ al nodo destinazione t . Gli archi della rete sono capacitati. Ad ogni collegamento $(i, j) \in A$ è infatti associata una capacità superiore u_{ij} , che indica il massimo numero di pacchetti inviabili lungo (i, j) .

Per ridurre la congestione della rete, si vuole organizzare l'invio di pacchetti da s a t in modo da minimizzare il massimo numero di pacchetti per collegamento. Inoltre, per evitare un'eccessiva dispersione dei pacchetti attraverso la rete, si vuole che il numero dei collegamenti utilizzati per l'invio non sia superiore ad un valore dato $K \in \mathbb{Z}^+$. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere come inviare i γ pacchetti da s a t rispettando i vincoli di capacità superiore ed il vincolo relativo al numero di collegamenti utilizzabili per l'invio, con l'obiettivo di minimizzare il massimo numero di pacchetti inviati sui singoli collegamenti della rete.

SVOLGIMENTO

Si tratta di una variante dei problemi di flusso studiati durante il corso, in cui è presente una sorgente di flusso, ovvero il nodo s , una destinazione, ovvero il nodo t , e in cui la quantità di flusso che s deve inviare a t è nota a priori, e pari al valore γ .

Per descrivere il problema introduciamo quindi una variabile di flusso x_{ij} per ogni collegamento (i, j) , per denotare il numero di pacchetti (o flusso) che si deciderà di inviare lungo (i, j) . Introduciamo inoltre le variabili binarie

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il flusso } x_{ij} \text{ risulta } > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (i, j) \in A.$$

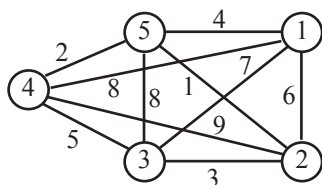
Utilizzando tali variabili decisionali, il problema di flusso può essere formulato mediante il seguente modello P.L.I., in cui la variabile ausiliaria w viene introdotta per stimare il massimo numero di pacchetti per collegamento:

$$\begin{aligned} \min \quad & w \\ & \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -\gamma & \text{se } i = s \\ \gamma & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i \in N \\ & x_{ij} \leq w \quad (i, j) \in A \\ & x_{ij} \leq u_{ij} y_{ij} \quad (i, j) \in A \\ & \sum_{(i,j) \in A} y_{ij} \leq K \\ & x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z} \quad (i, j) \in A \\ & y_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A \end{aligned}$$

I primi vincoli sono i classici vincoli di conservazione di flusso, uno per nodo: garantiscono l'invio di γ pacchetti da s a t . Seguono i vincoli di soglia. La variabile ausiliaria w stima per eccesso il numero di pacchetti inviato su ogni collegamento della rete, e quindi anche la massima di tali quantità. Minimizzando w , a livello di soluzione ottima tale variabile assume un valore uguale al massimo numero di pacchetti per collegamento, che viene pertanto minimizzato.

I vincoli successivi sono sia vincoli di capacità che vincoli logici. In particolare, se il flusso inviato lungo un arco (i, j) è positivo, allora la corrispondente variabile logica y_{ij} è forzata ad assumere il valore 1, segnalando in tal modo che l'arco (i, j) è utilizzato. Il vincolo seguente garantisce che il numero dei collegamenti utilizzati non ecceda il numero prefissato K . I vincoli finali definiscono le variabili x_{ij} come intere non negative, e le variabili y_{ij} come binarie.

5) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo col più piccolo valore $r > 2$ di archi dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r - 1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r - 2$ di tali archi. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, e si inseriscano in coda i figli di un nodo in ordine lessicografico crescente dell'insieme di archi fissati a zero (ad esempio, se si seleziona il nodo 5, e si fissano a zero le variabili relative a (5,1) e (5,3), il nodo figlio relativo a (5,1) va inserito prima di quello relativo a (5,3)). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching, o se il nodo viene chiuso e perché. Si visitino solamente i primi 7 nodi dell'albero delle decisioni (inclusa la radice). Se ciò non fosse sufficiente a risolvere il problema, quali sono la migliore valutazione inferiore e superiore disponibile quando l'algoritmo viene interrotto? Qual è quindi il gap relativo ottenuto? Giustificare la risposta.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con \underline{z} la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

Nodo radice L'MS1T, con $\underline{z} = 15$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile; pertanto $\underline{z} = 15 < z = +\infty$ ed occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5, che ha tre archi incidenti, e creare $3(3 - 1)/2 = 3$ figli in cui si fissano a zero rispettivamente le variabili relative agli archi (5, 1), (5, 2) e (5, 4) (i nodi sono inseriti in Q in quest'ordine).

$x_{15} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 17$, è mostrato in (b). Poiché $\underline{z} = 17 < z = +\infty$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre archi incidenti, e creare tre figli in cui si fissano a zero, rispettivamente, le variabili relative agli archi (2, 1), (2, 3) e (2, 5).

$x_{25} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (c). Poiché è un ciclo Hamiltoniano, si pone $z = 20$; inoltre, il nodo viene chiuso per ottimalità.

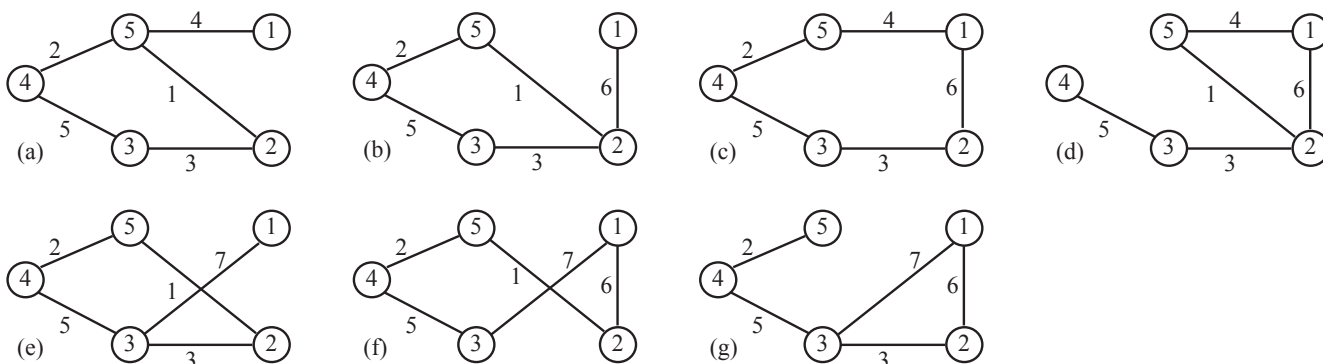
$x_{45} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 19$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 19 < z = 20$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre archi incidenti, e creare tre figli in cui si fissano a zero rispettivamente le variabili relative agli archi (2, 1), (2, 3) e (2, 5).

$x_{15} = x_{12} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 18$, è mostrato in (e). Poiché $\underline{z} = 18 < z = 20$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 3, che ha tre archi incidenti, e creare tre figli in cui si fissano a zero rispettivamente le variabili relative agli archi (3, 1), (3, 2) e (3, 4).

$x_{15} = x_{23} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 21$, è mostrato in (f). Poiché è un ciclo Hamiltoniano, il nodo viene chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione inferiore. Poiché però $\bar{z} = 21 > z = 20$, z non cambia.

$x_{15} = x_{25} = 0$ L'MS1T, con $\underline{z} = 23$, è mostrato in (g). Poiché $\underline{z} = 23 > z = 20$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

Poiché sono stati generati 7 nodi, come richiesto, l'algoritmo viene interrotto anche se Q non è vuota. L'analisi dell'algoritmo B&B assicura che la valutazione inferiore globale è pari a $\min\{ \underline{z}, \min\{ \underline{z}(P') : P' \in Q' \} \}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q . In questo caso Q' contiene il nodo $x_{45} = 0$, che ha una valutazione inferiore di 19, ed il nodo $x_{15} = x_{12} = 0$ che ha una valutazione inferiore di 18. Pertanto la miglior valutazione inferiore disponibile è 18, ed il gap relativo quando l'algoritmo viene interrotto è $(20 - 18)/18 \approx 5.5\%$.



6) Sia $P = \{ x \in R^n : Ax \leq b \}$ un poliedro non vuoto, e si assuma che A sia una matrice di rango massimo n . Si enunci e si dimostri la condizione necessaria e sufficiente per cui il problema di Programmazione Lineare $\max\{ cx : Ax \leq b \}$, per una data funzione obiettivo c , ammette ottimo finito, e almeno una delle sue soluzioni ottime corrisponde ad un vertice di P . (*Suggerimento*: si utilizzi il teorema di decomposizione dei poliedri)

SVOLGIMENTO

Dato P , il teorema di decomposizione dei poliedri assicura che esistono due insiemi finiti $X = \{x^1, \dots, x^s\} \subset R^n$ e $V = \{v^1, \dots, v^t\} \subset R^n$ per cui $P = \text{conv}(X) + \text{cono}(V)$. Inoltre, considerando una rappresentazione minimale di X , X contiene tutti e soli i vertici di P .

Come corollario si ha che il problema di PL

$$(1) \quad \max\{ cx : Ax \leq b \}$$

ammette ottimo finito se e solo se $cv^j \leq 0$ per $j = 1, \dots, t$; in questo caso esiste un $h \in \{1, \dots, s\}$ tale che x^h è una soluzione ottima del problema.

Infatti, (1) può essere equivalentemente riscritto come il seguente problema di PL nei vettori di variabili λ e ν :

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i (cx^i) + \sum_{j=1}^t \nu_j (cv^j) : \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \lambda \geq 0, \nu \geq 0 \right\}.$$

Questo problema è ovviamente non vuoto, ed ha ottimo finito se e solo se $cv^j \leq 0$ per ogni $j = 1, \dots, t$. Infatti, se fosse $cv^j > 0$ per un qualche indice j , allora facendo crescere ν_j all'infinito e fissando tutte le altre variabili il valore della funzione obiettivo crescerebbe anch'esso all'infinito.

Se invece $cv^j \leq 0$ per ogni $j = 1, \dots, t$, considerando un qualsiasi $x \in P$ ed i corrispondenti λ e ν risulta

$$cx = \sum_{i=1}^s \lambda_i (cx^i) + \sum_{j=1}^t \nu_j (cv^j) \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i (cx^i) \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i (cx^h) = cx^h$$

dove x^h è tale che $cx^h = \max\{ cx^i : i = 1, \dots, s \}$. Quindi il problema ha ottimo finito, ed inoltre x^h è una sua soluzione ottima.

Condizione necessaria e sufficiente per cui (1) ammetta ottimo finito, e una sua soluzione ottima sia uno dei punti di X , ovvero un vertice di P , è quindi $cv^j \leq 0$ per $j = 1, \dots, t$.

Si osservi che, in generale, tale condizione non è sufficiente a dimostrare che esista un vertice di P ottimo, in particolare perché non è detto che P ammetta vertici. Infatti, in una rappresentazione minimale di P l'insieme X contiene tutti e soli i punti estremi (ovvero, i vertici) di P solamente quando $\text{rango}(A) = n$. Se fosse $\text{rango}(A) < n$, non esisterebbe alcuna base B per il problema, e quindi nessun vertice del poliedro.