Simulazione
a.a. 2009/10
Integrazione numerica

Tecniche di integrazione numerica

Vedremo alcune tecniche per risolvere le equazioni differenziali presenti nei modelli ovvero:

- metodo di Eulero,
- metodo di Runge-Kutta del secondo odine,
- metodo di Runge-Kutta del quarto ordine.

Metodo di Eulero (1)

Il metodo di integrazione numerica che abbiamo finora usato nei diversi modelli che abbiamo visto è noto come metodo di Eulero. Indicando con $x(t)$ la generica variabile di livello, essa è regolata dalla equazione differenziale:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t)$$

la cui versione discretizzata è:

$$x(t+h) = x(t) + f(x(t), t)h$$

in cui $f(x(t), t)$ è l'espressione che fornisce la derivata di $x(t)$, e h è l'intervallo di tempo usato (Δt). Ad esempio, nel caso della dinamica di una popolazione con risorse illimitate è $x(t) = P(t)$ e $f(x(t), t) = (N - M)x(t) = (N - M)P(t)$.

Metodo di Eulero (2)

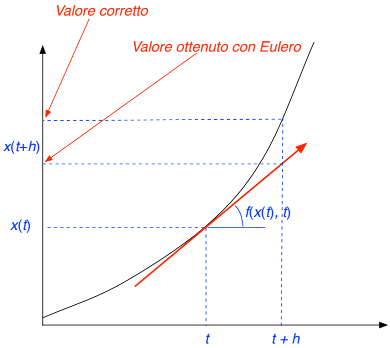
Sviluppando con Taylor la funzione $x(t)$ intorno al punto t e fermandoci al termine di primo grado si ha

$$x(t+h) = x(t) + f(x(t), t)h + O(h^2)$$

che, a parte il termine che indica l'errore, è la formula usata nel metodo di Eulero.

Metodo di Eulero (3)

Il metodo di Eulero è illustrato graficamente nella figura. Supponendo di conoscere il valore di x nel punto t, il valore di x nel punto $t + h$ si ottiene approssimando la curva in t con una retta con pendenza pari alla derivata in t, cioè tangente alla curva in $(t, x(t))$.

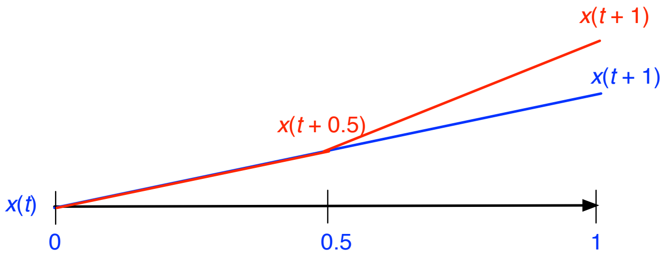


Metodo di Eulero (4)

Il problema con la formula

$$x(t+h) = x(t) + f(x(t), t)h$$

è che viene calcolato il valore di x al tempo $t + h$ a partire dal valore di x al tempo t, facendo uso della derivata di x al tempo t, derivata che si assume costante per tutto l'intervallo h.
Ciò porta alla situazione illustrata dalla figura, dove si vedono i diversi risultati con un intervallo di tempo pari ad 1 e con uno pari a 0.5.



Metodo di Eulero (5)

Consideriamo ad esempio la crescita di una popolazione nell'ipotesi di usare intervalli pari a 1 e a 0.5.

Tempo	Popolazione	Tempo	Popolazione	Tempo	Popolazione	Tasso di natalità (nascite per 1000)
	$\Delta t = 1$		$\Delta t = 0.5$		$\Delta t = 0.5$	
1	1,000	1,0	1,000	1	1,000	
2	1,015	1,5	1,008	2	1,015	20
3	1,030	2,0	1,015	3	1,030	
4	1,046	2,5	1,023	4	1,046	
5	1,061	3,0	1,030	5	1,062	
6	1,077	3,5	1,038	6	1,078	
7	1,093	4,0	1,046	7	1,094	
8	1,110	4,5	1,054	8	1,110	
9	1,126	5,0	1,062	9	1,127	
10	1,143	5,5	1,070	10	1,144	
11	1,161	6,0	1,078	11	1,161	
12	1,178	6,5	1,086	12	1,179	
13	1,196	7,0	1,094	13	1,196	
14	1,214	7,5	1,102	14	1,214	
15	1,232	8,0	1,110	15	1,233	
16	1,250	8,5	1,119	16	1,251	
17	1,269	9,0	1,127	17	1,270	
18	1,288	9,5	1,135	18	1,289	
19	1,307	10,0	1,144	19	1,309	
20	1,327	10,5	1,153	20	1,328	
21	1,347	11,0	1,161	21	1,348	
22	1,367	11,5	1,170	22	1,369	
23	1,388	12,0	1,179	23	1,389	
24	1,408	12,5	1,188	24	1,410	
25	1,430	13,0	1,196	25	1,431	
26	1,451	13,5	1,205	26	1,453	
27	1,473	14,0	1,214	27	1,475	
28	1,495	14,5	1,224	28	1,497	
29	1,517	15,0	1,233	29	1,520	
30	1,540	15,5	1,242	30	1,542	

Metodo di Runge-Kutta del secondo ordine

Nel metodo di Runge Kutta del 2^0 ordine l'idea è di approssimare la funzione fermandosi al termine del secondo ordine:

$$
\begin{aligned}
x(t+h) &= x(t) + f(x(t),t)h + \frac{f'(x(t),t)}{2!}h^2 + O(h^3) \\
&= x(t) + f(x(t),t)h + (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt})\frac{h^2}{2} + O(h^3) \\
&= x(t) + (f(x(t),t) + (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}f(x(t),t))\frac{h}{2})h + O(h^3)
\end{aligned}
$$

La difficoltà principale sta nel calcolo della derivata $f'(x(t),t)$.

Metodo di Runge-Kutta del secondo ordine

Osserviamo che il termine

$$(f(x(t),t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f(x(t),t))\frac{h}{2}$$

è una approssimazioe di $f(x(t+\frac{h}{2}), t+\frac{h}{2})$. Infatti, espandendo con Taylor si ha:

$$f(x(t+\frac{h}{2}), t+\frac{h}{2}) = f(x(t),t) + (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt})\frac{h}{2} + O(h^2)$$

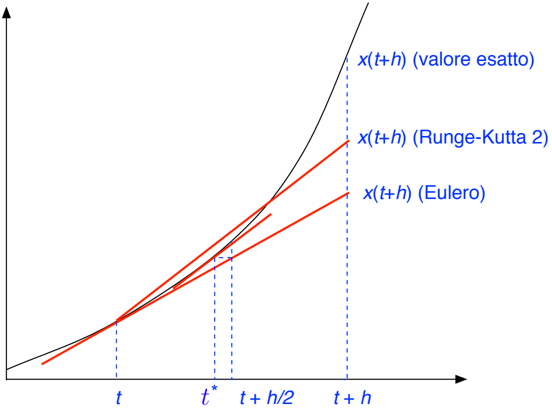
e sostituendo nella espressione di $x(t+h)$ si ha;

$$x(t+h) = x(t) + f(x(t+\frac{h}{2}), t+\frac{h}{2})h + O(h^3)$$

e sostituendo a $x(t+\frac{h}{2})$ la sua approssimazione del primo ordine si ha

$$x(t+h) = x(t) + f(x(t) + f(x(t),t)\frac{h}{2}, t+\frac{h}{2})h + O(h^3)$$

Metodo di Runge-Kutta del secondo ordine



Nel metodo di Runge-Kutta di ordine 2, al posto della derivata in $t + \frac{h}{2}$, si usa la sua approssimazione calcolata con il metodo di Eulero. Osserviamo che proprio perché il valore calcolato è approssimato, esso corrisponde alla derivata calcolata nel un punto $\bar{t}$ per cui è $x(\bar{t}) = x(t) + f(x(t), t)\frac{h}{2}$.

Metodo di Runge-Kutta del quarto ordine (1)

Vengono utilizzate quattro derivate, quella calcolata nel punto iniziale (al tempo t), due calcolate nel punto di mezzo dell'intervallo $[t, t+h]$ ed una calcolata nel punto terminale dell'intervallo. Si ottengono così quattro approssimazioni diverse del valore di $x(t+h)$ e se ne fa una combinazione convessa. Il primo valore che si ottiene è lo stesso che trova il metodo di Eulero:

$$x_1(t+h) \cong x(t) + f(x(t), t)h$$

Da qui, possiamo ricavare una prima approssimazione del valore di x nel punto di mezzo dell'intervallo:

$$x_1(t+\frac{h}{2}) = x(t) + f(x(t), t)\frac{h}{2}$$

e quindi una seconda approssimazione di $x(t+h)$:

$$\begin{aligned} x_2(t+h) &= x(t) + f(x_1(t+\frac{h}{2}), t+\frac{h}{2})h \\ &\cong x(t) + f(x(t), t)h + f'(x(t), t)\frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

Metodo di Runge-Kutta del quarto ordine (2)

Possiamo allora avere una nuova approssimazione di $x(t+h/2)$:

$$x_2(t+\frac{h}{2}) = x(t) + f(x_1(t+\frac{h}{2}), t+\frac{h}{2})\frac{h}{2}$$

da cui si ricava una terza approssimazione di $x(t+h)$:

$$x_3(t+h) = x(t) + (f(x_2(t+\frac{h}{2}), t+\frac{h}{2})h$$

e infine una quarta approssimazione di $x(t+h)$:

$$x_4(t+h) = x(t) + f(x_3(t+h), t+h)h$$

Si calcola quindi il valore di $x(t+h)$ eseguendo una combinazione convessa dei 4 valori fin qui trovati:

$$x(t+h) \cong \frac{x_1(t+h)}{6} + \frac{x_2(t+h)}{3} + \frac{x_3(t+h)}{3} + \frac{x_4(t+h)}{6}$$

Metodo di Runge-Kutta del quarto ordine (3): grado di approssimazione

In pratica il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine corrisponde ad approssimare $x(t+h)$ con Taylor, fermandosi al termine di grado 4. L'errore è quindi un infinitesimo dell'ordine di h^5.

Ci sono in realtà diverse varianti del metodo di Runge-Kutta. Quella vista è solo una di esse.

Metodi a confronto

$$\Delta t = 1$$