5. Distribuzioni

Corso di Simulazione

Anno accademico 2009/10

Spazio di probabilità

Ω *spazio campione*

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ *spazio degli eventi*:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$
(ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
(iii) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

$P\colon \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ *funzione di probabilità*:

(i) $P(A) \geq 0$
(ii) $P(\Omega) = 1$
(iii) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Proprietà

Eventi

$A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$ e $B \setminus A \in \mathcal{F}$

Probabilità

$P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$

$A \subseteq B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Variabili casuali

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ variabile casuale se

$$\{\omega \in \Omega \;:\; X(\omega) \leq r\} \in \mathcal{F}$$

Funzione di distribuzione di X

$$F_X(r) := P(X \leq r) = P(\{\omega \in \Omega \;:\; X(\omega) \leq r\})$$

Esempio I

Arrivo di 100 pazienti urgenti, gravi o non gravi al pronto soccorso
X_u = numero pazienti urgenti (analogamente X_g, X_{ng})
$\Omega = \{u, g, ng\}^{100}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $P =?$
$X_u(w) = card(\{i \in \{1, ..., 100\} \ : \ w_i = u\})$
nessun paziente è urgente: $\{X_u = 0\}$
almeno tre pazienti sono gravi: $\{X_g \geq 3\}$

Esempio II

Tempo di interarrivo dei 100 pazienti

$\Omega = \mathbb{N}^{100}$ (oppure $\Omega = \mathbb{R}_+^{100}$), $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $P =?$

w_i = tempo tra l'arrivo del paziente $i-1$ e l'arrivo del paziente i

X_k = tempo necessario per l'arrivo dei primi k pazienti

$X_k(\omega) = w_1 + ... + w_k$

k pazienti arrivati in 60 minuti: $\{X_k \leq 60\}$

dopo 10 minuti non è arrivato nessun paziente: $\{X_1 > 10\}$

Esempio III

Ad uno sportello di banca si possono fare solamente tre operazioni:

- a incasso di un assegno
- b bonifico
- c versamento

Assumiamo che un singolo cliente faccia una sola di esse. Consideriamo come esperimento l'arrivo del prossimo cliente, come esito dell'esperimento la richiesta di una delle operazioni, a, b e v, e come evento il fatto che il cliente chieda una in un sottoinsieme delle operazioni (ad esempio la a o la v).

Esempio III (*cont.*)

Poniamo allora $\Omega = \{a, b, v\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$. Sia poi X la funzione così definita:

$$\begin{aligned} X(a) &= 0, \\ X(b) &= 1, \\ X(v) &= 2. \end{aligned}$$

Esempio III (*cont.*)

La funzione X è una variabile casuale, infatti si ha:

$$\begin{aligned} r < 0 \quad & \{\omega : X(\omega) \leq r\} & = \emptyset, \\ 0 \leq r < 1 \quad & \{\omega : X(\omega) \leq r\} & = \{a\}, \\ 1 \leq r < 2 \quad & \{\omega : X(\omega) \leq r\} & = \{a, b\}, \\ 2 \leq r \quad & \{\omega : X(\omega) \leq r\} & = \Omega. \end{aligned}$$

Distribuzioni discrete

X è una variabile casuale discreta se l'insieme dei valori che può assumere è numerabile: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ...\}$

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{se } x = x_i, \text{per qualche } i = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Distribuzioni discrete

X è una variabile casuale discreta se l'insieme dei valori che può assumere è numerabile: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ...\}$

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{se } x = x_i, \text{per qualche } i = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$f_X(x)$ è una Funzione di densità discreta

Distribuzioni discrete

X è una variabile casuale discreta se l'insieme dei valori che può assumere è numerabile: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ...\}$

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{se } x = x_i, \text{per qualche } i = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$f_X(x)$ è una Funzione di densità discreta

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$$

è la corrispondente funzione di distribuzione

$$f_X(x_i) = F_X(x_i) - lim_{h \to 0^+} F_X(x_i - h)$$

Media e varianza

Media di X

$$\mu_X = E[X] := \sum_i x_i f_X(x_i)$$

Media e varianza

Media di X

$$\mu_X = E[X] := \sum_i x_i f_X(x_i)$$

Varianza di X

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 = Var[X] &:= E[(X - \mu_X)^2] \\ &= \sum_i (x_i - \mu_X)^2 f_X(x_i) \end{aligned}$$

Media e varianza

Media di X

$$\mu_X = E[X] := \sum_i x_i f_X(x_i)$$

Varianza di X

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 = Var[X] \quad &:= \quad E[(X-\mu_X)^2] \\ &= \quad \sum_i (x_i-\mu_X)^2 f_X(x_i)\end{aligned}$$

Deviazione standard di X

$$\sigma_X := \sqrt{Var[X]}$$

Proprietà della media

X, Y variabili aleatorie, $\alpha \in \mathbb{R}$

$E[\alpha] = \alpha$

$E[\alpha X] = \alpha E[X]$

$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Proprietà della varianza (1)

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X-\mu_X)^2] \\ &= E[X^2] + \mu_X^2 - 2\mu_X E[X] \\ &= E[X^2] + \mu_X^2 - 2\mu_X^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Proprietà della varianza (2)

$$Var[\alpha] = 0$$
$$Var[\alpha X] = \alpha^2 Var[X]$$

$$\begin{aligned}
Var[X+Y] &= E[(X+Y-E[X+Y])^2] \\
&= E[(X+Y-\mu_X-\mu_Y)^2] \\
&= E[(X-\mu_X)^2+(Y-\mu_Y)^2+2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\
&= \sigma_X^2+\sigma_Y^2+2Cov[X,Y],
\end{aligned}$$

$Cov[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] =$ *Covarianza* di X e Y.

Proprietà della varianza (3)

Se X ed Y sono indipendenti, allora la loro covarianza è nulla e si ha:

$$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y].$$

Proprietà della varianza (3)

Se X ed Y sono indipendenti, allora la loro covarianza è nulla e si ha:

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y].$$

$P(|X - \mu_X| > r\sigma_X) \leq 1/r^2$ *Disuguaglianza di Chebyshef*

$$\Downarrow$$

$P(|X - \mu_X| < r\sigma_X) \geq 1 - 1/r^2$

Funzione generatrice dei momenti

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[e^{tX}] = E[1 + Xt + \frac{1}{2!}(Xt)^2 + \frac{1}{3!}(Xt)^3 + \ldots] \\ &= 1 + \mu_{1X} t + \frac{1}{2!}\mu_{2X} t^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\mu_{iX} t^i. \end{aligned}$$

μ_{rX}, il *momento* r^{esimo} di X, è la media della variabile casuale X^r.

È immediato verificare che risulta:

$$\frac{d^r}{dt^r} m_X(0) = \mu_{rX}.$$

Distribuzione uniforme

$$X : \Omega \to \{1, ..., n\}$$

Tutti i possibili valori sono equiprobabili

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in \{1, ..., n\} \\ 0 & x \notin \{1, ..., n\} \end{cases} = \frac{1}{n} I_{\{1,2,...,n\}}(x)$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{n+1}{2} \\ Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

Distribuzione binomiale

$$X : \Omega \to \{0, 1, ..., n\}$$

Numero di successi in un esperimento ripetuto n volte

$p \in [0, 1]$ probabilità di successo in un singolo esperimento

$$f_X(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} I_{\{0,1,2,...,n\}}(k)$$

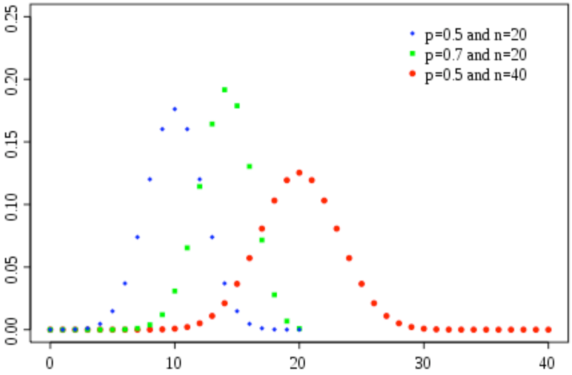
Distribuzione binomiale

$$X : \Omega \to \{0, 1, ..., n\}$$

Numero di successi in un esperimento ripetuto n volte

$p \in [0, 1]$ probabilità di successo in un singolo esperimento

$$f_X(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} I_{\{0,1,2,...,n\}}(k)$$



Distribuzione binomiale (2)

$$m_X(t) = \sum_{i=0}^{n} e^{ti} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (pe^t)^i q^{n-i} = (q + pe^t)^n$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_X(t)}{dt} &= pe^t n(pe^t + q)^{n-1} \\ \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} &= pe^t n(pe^t + q)^{n-1} + pe^t n(n-1)pe^t(pe^t + q)^{n-2} \\ &= pe^t n(pe^t + q)^{n-2}(npe^t + q) \end{aligned}$$

Distribuzione binomiale (3)

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{dm_X(0)}{dt} = pn, \\ E[X^2] &= \frac{d^2 m_X(0)}{dt^2} = np(np+q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= np(np+q) - (np)^2 = npq \end{aligned}$$

Esempi

- Numero di viaggiatori prenotati che non si presentano alla partenza di un volo.
- Numero di pezzi difettosi in un lotto di n pezzi prodotti.
- Numero di clienti che richiedono un particolare servizio.

Distribuzione geometrica

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$$

Numero di fallimenti prima di un successo

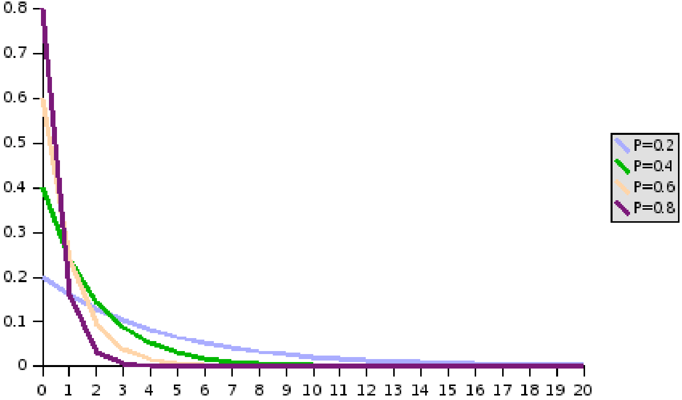
$$f_X(k) = P(X = k) := (1 - p)^k p$$

Distribuzione geometrica

$$X : \Omega \to \mathbb{N}$$

Numero di fallimenti prima di un successo

$$f_X(k) = P(X = k) := (1 - p)^k p$$



Distribuzione geometrica (2)

$$m_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{it} p(1-p)^i = p \sum_{i=0}^{\infty} [e^t(1-p)]^i.$$

e se assumiamo che essa sia definita in un intorno sufficientemente piccolo dello 0 per cui risulti $e^t(1-p) < 1$, allora è

$$m_X(t) = \frac{p}{1 - e^t(1-p)}$$

Distribuzione geometrica (2)

$$m_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{it} p(1-p)^i = p \sum_{i=0}^{\infty} [e^t(1-p)]^i.$$

e se assumiamo che essa sia definita in un intorno sufficientemente piccolo dello 0 per cui risulti $e^t(1-p) < 1$, allora è

$$m_X(t) = \frac{p}{1 - e^t(1-p)}$$

$$m'_X(t) = \frac{pe^t(1-p)}{(1 - e^t(1-p))^2}$$

Distribuzione geometrica (2)

$$m_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{it} p(1-p)^i = p \sum_{i=0}^{\infty} [e^t(1-p)]^i.$$

e se assumiamo che essa sia definita in un intorno sufficientemente piccolo dello 0 per cui risulti $e^t(1-p) < 1$, allora è

$$m_X(t) = \frac{p}{1 - e^t(1-p)}$$

$$m'_X(t) = \frac{pe^t(1-p)}{(1-e^t(1-p))^2}$$

$$m''_X(t) = \frac{pe^t(1-p)(1-e^t(1-p))^2 + 2(1-e^t(1-p))e^t(1-p)pe^t(1-p)}{(1-e^t(1-p))^4}$$

Distribuzione geometrica (3)

$$E[X] = m'_X(0) = \frac{1-p}{p};$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= m''_X(0) - E[X]^2 \\ &= \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}. \end{aligned}$$

Evento ripetuto nel tempo: ipotesi

– numeri di occorrenze in intervalli disgiunti sono indipendenti
– Se $h << 1$, allora

$$P(X_{[\tau,\tau+h]} = 1) = \nu h + o(h)$$

$$P(X_{[\tau,\tau+h]} > 1) = o(h)$$

dove $o(h)$ indica un infinitesimo di ordine superiore al primo:

$$\lim_{h \to 0} \; o(h)/h = 0$$

Evento ripetuto nel tempo: discretizzazione

Dividere $[0, t]$ in n intervalli di ampiezza t/n

Al più una singola occorrenza in ciascun intervallo $[t_k, t_{k+1}]$
successo = occorrenza nell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ considerato

$X^{(n)}_{[0,t]}$ ha distribuzione binomiale di parametro $p = \nu t/n$

$$
\begin{aligned}
P[X = k] &= \binom{n}{k} \left(\frac{\nu t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\nu t}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!n^k} (\nu t)^k \left(1 - \frac{\nu t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\nu t}{n}\right)^{-k} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{(\nu t)^k e^{-\nu t}}{k!}.
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\nu t}{n}\right)^n &= \lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{(m+1)\nu t} \\
&= \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m\nu t+\nu t} \\
&= \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m\nu t}\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\nu t} \\
&= \lim_{m\to+\infty}\left((1+\frac{1}{m})^m\right)^{-\nu t} \\
&= e^{-\nu t}
\end{aligned}$$

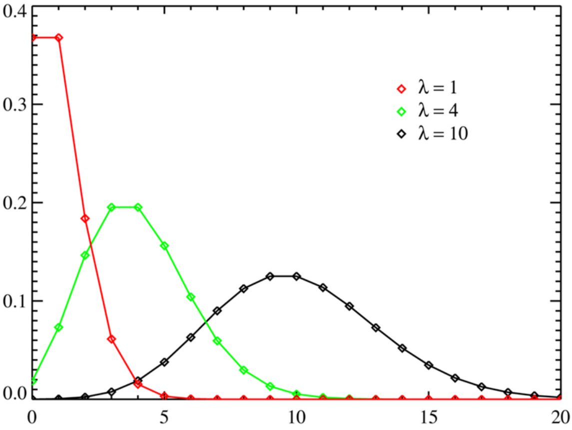
$$m = \frac{n}{\nu t} - 1$$

$$P[X = k] = \frac{(\nu t)^k e^{-\nu t}}{k!}$$

$E[X] = \nu t \quad \Rightarrow \quad \nu$ è il numero medio di arrivi per unità di tempo

Numero di occorrenze di un evento in $[0,t]$

$$f_X(k) := \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$



$\lambda := \nu t$ (ν numero medio di occorrenze nell'unità di tempo)

Distribuzione di Poisson (2)

$$\boxed{\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$$

$$m_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^i}{i!} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\frac{dm_X(t)}{dt} = \lambda e^{\lambda(e^t-1)+t}, \qquad \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} = \lambda e^{\lambda(e^t-1)+t}(\lambda e^t + 1)$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{dm_X(0)}{dt} = \lambda, \\ E[X^2] &= \frac{d^2 m_X(0)}{dt^2} = \lambda(\lambda+1) \end{aligned}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$$

Distribuzioni continue

X è una variabile casuale continua se $X(\Omega) \in \mathbf{R}$, ed esiste una funzione reale f_X per cui :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du, \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

(f_X è la *funzione di densità*)

$$F_X(x) \text{ differenziabile} \Rightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Media e varianza

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

$$Var[X] = E[(X - \mu_X)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$m_X(t) = E[e^{tX}]$$

Distribuzione uniforme

X è una variabile casuale uniformemente distribuita nell'intervallo reale $[a, b]$ se

$$f_X(x) = f_X(x; a, b) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

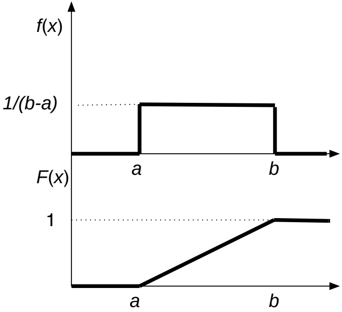
$$F_X(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right) I_{[a,b]}(x) + I_{(b,\infty)}(x)$$

Distribuzione uniforme

X è una variabile casuale uniformemente distribuita nell'intervallo reale $[a, b]$ se

$$f_X(x) = f_X(x; a, b) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

$$F_X(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right) I_{[a,b]}(x) + I_{(b,\infty)}(x)$$



Media e Varianza

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}$$

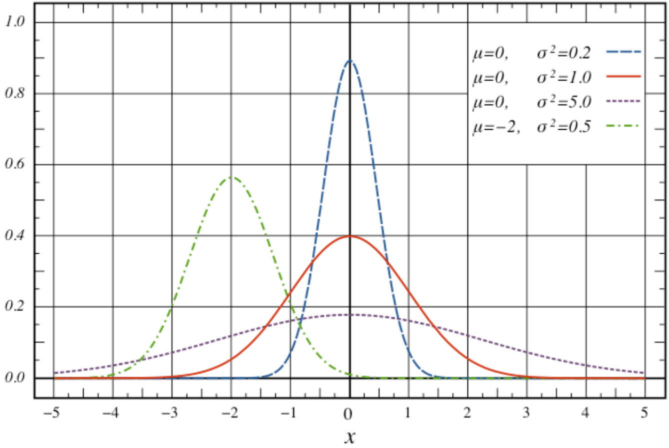
$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

$$m_X(t) = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$$

Distribuzione normale

$$f_X(x) = f_X(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ e σ sono rispettivamente la media e la deviazione standard



Media e Varianza

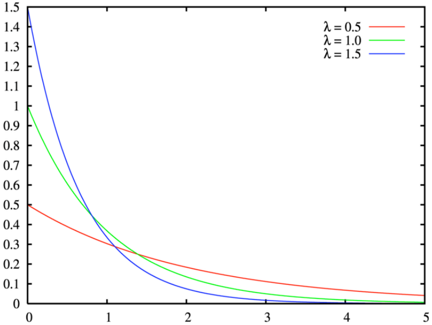
$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= E[e^{tX}] = e^{t\mu} E[e^{t(X-\mu)}] \\
&= e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{t(x-\mu)} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 t(x-\mu)}{2\sigma^2}} dx \\
&= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \frac{d}{dt} m_X(0) = \mu \\
Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2
\end{aligned}
$$

Variabile casuale definita nello spazio dei reali non negativi, con $\lambda > 0$

$$f_X(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x},$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$



Media e Varianza

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}. \end{aligned}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Esponenziale e Poisson

Consideriamo un evento le cui occorrenze nel tempo hanno una distribuzione di Poisson. Supponendo che si sia appena verificata un'occorrenza, chiamiamo con X la variabile casuale “tempo da attendere prima della occorrenza successiva”. Ricordando che, se Y è una v.c. Poisson, è $P[Y = k] = \frac{(\nu t)^k e^{-\nu t}}{k!}$, si ha allora

$$P[X > t] = P[\text{nessuna occorrenza fino al tempo } t] = e^{-\nu t}$$

e di conseguenza

$$F_X(t) = P[X \leq t] = 1 - e^{-\nu t}, t \geq 0$$

$$f_X(t) = \frac{dF_X(t)}{dt} = \nu e^{-\nu t}$$

Proprietà dell'esponenziale

Per ogni coppia (s, t) di reali positivi, vale la

$$P[X > s + t | X > s] = P[X > t].$$

Infatti è

$$P[X > s+t|X > s] = \frac{P[X > s + t]}{P[X > s]} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P[X > t].$$

Si parla in questo caso di proprietà di *assenza di memoria*.
Inoltre:

$$P[cX \leq x] = P[X \leq \frac{x}{c}] = 1 - e^{\frac{\lambda}{c}x}$$

X esponenziale con parametro $\lambda \Rightarrow cX$ esponenziale con parametro $\frac{\lambda}{c}$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili casuali indipendenti con distribuzione esponenziale e parametro λ.

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

La probabilità che Y_n sia minore o uguale a t è pari alla probabilità che nel tempo t si verifichino almeno n eventi.

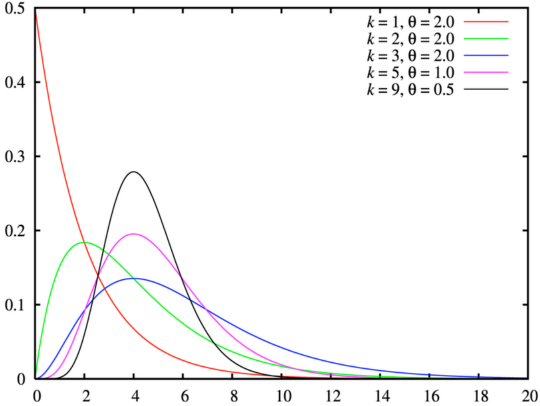
$$F_{Y_n}(t) = P[Y_n \leq t] = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!}.$$

$$f_{Y_n}(t) = F'_{Y_n}(t) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda j (\lambda t)^{j-1} e^{-\lambda t} - \lambda (\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Gamma: media e varianza

$$E[Y_n] = \frac{n}{\lambda}, \qquad Var[Y_n] = \frac{n}{\lambda^2}.$$



$$k = n, \qquad \theta = \frac{1}{\lambda}$$