

Moltiplicazione A e B di n cifre

lit model RAM

word model  $A * B$   $\Theta(1)$

Popper Ahmeds

1700 e.c.

British Museo Londra

MOLTEGIZIA (A, B)  $A \geq B$

$P = 0;$

while (A > 0) {

$\approx$  n cifre binarie

$\Theta(n)$  { if "A è dispari"  $P = P + B;$  }  $\Theta(n)$   
 $\left[ \begin{array}{l} A = A/2; \quad \Theta(1) \\ B = B * 2; \quad \Theta(1) \end{array} \right.$  volte

} return P;  $ABAC0$

moltiplica  $\times 2$  aggiungendo 1 zero a destra  
 divide  $\times 2$  togliendo le cifre meno signif.

22 ~~10~~ ~~11~~ ~~0~~ ~~0~~ = 44  
 $2^5$   $2^3 2^2$

11 = 1011

$11/2 = 5$

101  
 $2^2 + 2^0 = 5$

$\Theta(1)$

A	B	P	
21	13	$0 + 13 = 13$	21
10	26	13	13
5	52	$13 + 52 = 65$	63
2	104	65	21
1	208	$65 + 208 = 273$	273

$208 +$

$$\begin{array}{r} \bar{1} \\ 0 \end{array} \mid \bar{208} \quad \bar{65} + \bar{208} = \boxed{273} \quad \begin{array}{r} 208 + \\ 65 \\ \hline 273 \end{array}$$

correttore

$A/2 * 2B$  se  $A$  è pari

$A * B = \begin{cases} A/2 * 2B & \text{se } A \text{ è pari} \\ A/2 * 2B + B & \text{se } A \text{ è dispari} \end{cases}$

Complessità

$$\Theta(n^2)$$

MOLT EGIZIA

$$\Theta(n^2)$$

CARTA E PENNA

Moltiplicazione

Divide et Impere ?

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 4T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

max numero di cifre del risultato:  $2n$

$$a = 4 \quad b = 2 \quad f(n) = \Theta(n)$$

$$n^{\log_b a} : n \quad n^2 : n$$

$$f(n) = n = O(n^{2-\epsilon}) \quad \forall \epsilon \leq 1$$



caso 1  $\Rightarrow$   $T(n) = \Theta(n^2)$

$$A = A_1 10^{n/2} + A_2$$

$$B = B_1 10^{n/2} + B_2$$

$$A * B = (A_1 10^{n/2} + A_2) * (B_1 10^{n/2} + B_2)$$

$$(A_1 + A_2) * (B_1 + B_2) = \boxed{A_1 B_1 + A_2 B_1 + A_1 B_2 + A_2 B_2}$$

$$A * B = A_1 B_1 10^m + \underbrace{(A_2 B_1 + A_1 B_2)}_{10^{m/2}} + A_2 B_2$$

$$= A_1 B_1 10^m + ((A_1 + A_2) * (B_1 + B_2) - A_1 B_1 - A_2 B_2) \cdot 10^{m/2} + A_2 B_2.$$



SOLO 3 Moltiplicazioni  
di numeri di  $n/2$  cifre

MOLTRAPIDA  $(A, B, n)$

if  $(n == 1)$  return  $A * B$ ;

else {

// dividi  $A$  e  $B$  in  $A_1 A_2$  e  $B_1 B_2$  //

$X = \text{MOLTRAPIDA}(A_1, B_1, n/2)$

$Y = \text{MOLTRAPIDA}(A_2, B_2, n/2)$

$Z = \text{MOLTRAPIDA}(A_1 + A_2, B_1 + B_2, n/2) - X - Y$ ;

return  $X * 10^m + Z * 10^{m/2} + Y$ ;

}

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n=1 \\ 3T(n/2) + \underline{\Theta(n)} \end{cases}$$

$$f(n) = n \quad \log_b a = 1.79 \quad n^{1.79}$$



$$f(n) = O(n^{1.79 - \epsilon}) \quad \text{per } \epsilon \leq 0.79$$

caso 1

$$T(n) = \Theta(n^{1.79})$$

$$\Theta(n^2) \Rightarrow \Theta(n^{1.79})$$

## Moltiplicazione di matrici

grafice molto importante dal punto  
viste pratico

2 matrici A e B  $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad \underline{n \times n}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} * b_{kj} = \text{prodotto righe colonne}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

$$i=2 \rightarrow \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & \dots & b_{31} & \dots \\ \dots & \dots & b_{32} & \dots \\ \dots & \dots & b_{33} & \dots \\ \dots & \dots & b_{34} & \dots \end{bmatrix} \quad j=3$$

$$c_{23} = a_{21} b_{31} + a_{22} b_{32} + a_{23} b_{33} + a_{24} b_{34}$$

Quanto costa calcolare C

C è composta di  $n^2$  elementi  
 per ciascuno elemento devo fare  
 n moltiplicazioni

Tot =  $n^3$  moltiplicazioni  $n^2$  somme

Divide et Impera ?

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

$$C_{11} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21}$$

$$C_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22}$$

C

MOLTMAT (A, B, n):

if (n == 1) return C = [a<sub>11</sub> \* b<sub>11</sub>];

else {

|| riparti sei A in A<sub>11</sub>, A<sub>12</sub>, A<sub>21</sub>, A<sub>22</sub> di  $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

" B in B<sub>11</sub>, B<sub>12</sub>, B<sub>21</sub>, B<sub>22</sub> " ||

$$C_{11} = \text{MOLTMAT}(A_{11} * B_{11}^{n/2}) + \text{MOLTMAT}(A_{12} * B_{21}^{n/2});$$

$$C_{12} = \text{MOLTMAT} \dots$$

$$C_{21} =$$

$$C_{22} =$$

$n/2 \times n/2$

$C_{22} =$   

$$\|C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \| ;$$
 return C ;  
 $\}$

$n/2 \times n/2$   
 $\frac{n^2}{4} = \Theta(n^2)$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$
 $n^2 \text{ el} \rightarrow \Theta(n^2)$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 8 T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2) & \end{cases}$$

Esperto  $f(n) = n^2$   $n^{\log_b a} = n^3$

$n^2 = O(n^{3-\epsilon})$   $\mu \epsilon \leq 1$



caso 1:  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$

## Algoritmo di Strassen

$X_1 = (A_{11} + A_{21}) \cdot (B_{11} + B_{22})$

$X_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22}$

$X_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11}$

$X_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} - B_{12})$

$X_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22})$

$X_7 = (A_{12} - A_{21}) \cdot (B_{21} + B_{22})$

$X_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11})$

$C_{11} = X_1 + X_4 - X_5 - X_7$  4

$C_{12} = X_3 + X_4$  1

$C_{21} = X_2 + X_4$  1

$C_{22} = X_1 + X_3 - X_2 + X_6$  3

$\nabla$  prodotti di matrici  $\underline{n} \times \underline{n}$

7 prodotti di matrici  $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

8 somme di matrici

$$T(n) = 7 + \left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$$

$$f(n) = n^2 \quad n^{\log_b a} = n^{2.81}$$

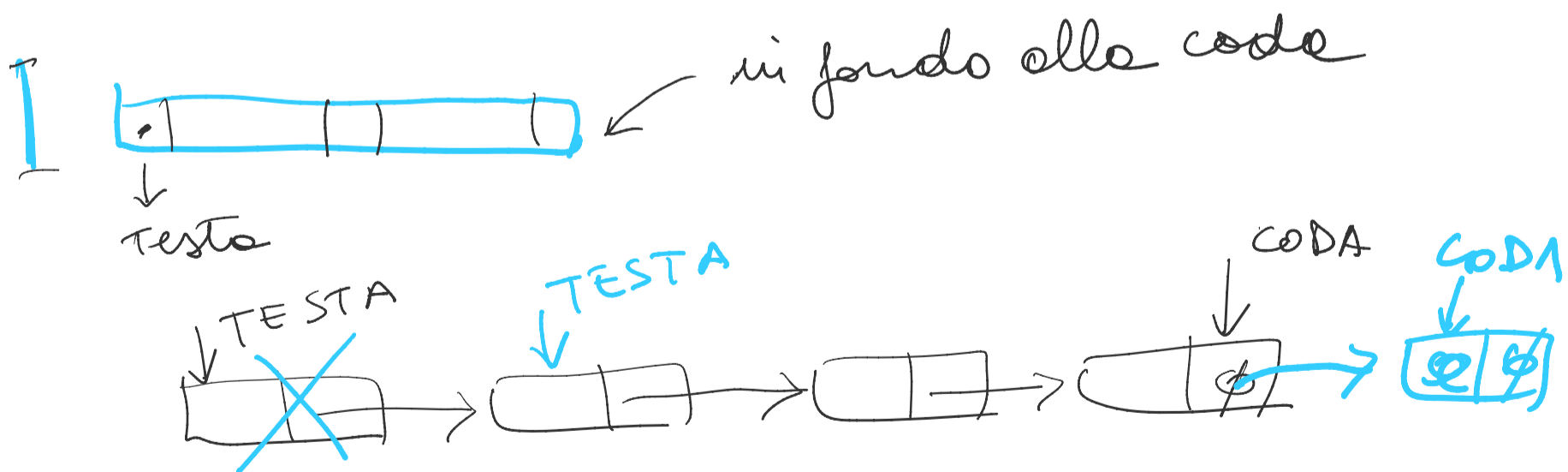
Bin, Caporari, Lotti, Romani  $n^{2.7}$

$n^{2.4}$  limite inferiore??  
HEAP muichis

code Struttura dati

- 1) Inserzione
  - 2) Estrazione
  - 3) (lettere del primo)
- }  $\neq 1 \neq 0$

First in First out



$\Theta(1)$

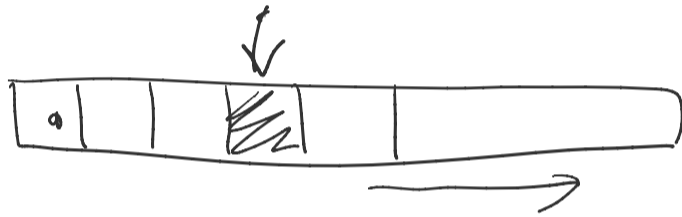
liste con puntatori

CODA CON PRIORITA'

- 1) Inserzione
- 2) estrazione del max  
(l elemento e prioritè max)
- 3) lettura del max

come implementarlo

	array	array ord.	liste
1)	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$
2)	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$
3)	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$



HEAP → CODA CON PRIORITÀ

2 operazioni costano  
 $O(\log n)$   
 1 operazione  $\Theta(1)$

□ \_\_\_\_\_